О ПОРЯДКЕ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ *)

Введение. В моей работе [1] основные результаты о точном порядке наилучших приближений функций были установлены для приближений действительных периодических функций тригонометрическими полиномами. Это связано с тем, что в некоторых рассуждениях использовались специальные свойства тригонометрической системы (“неравенство Стечкина” [2]). Здесь я показываю, что основные результаты [1] сохраняют силу для приближений полиномами по весьма общим системам (системы Бернштейна и Джексона; см. п. 2 и п. 4). Поскольку все соображения, необходимые для такого обобщения, уже содержатся в [1], я, как правило, ограничиваюсь ссылками на эту работу.

Все результаты остаются справедливыми для функций из пространств L^p, $1 \leqslant p < \infty$, для функций, заданных на $\mathbb{R}$, при надлежащей интерпретации, для функций многих переменных, и т.д.

Обозначения. $\mathbb{T}$ — окружность, $C = C(\mathbb{T})$ — пространство действительных или комплексных непрерывных на $\mathbb{T}$ функций, наделенное нормой $\|f\| = \max_{t\in\mathbb{T}} \mid f(t) \mid$; $k \in \mathbb{N}$; $C^{(k)}$ — множество функций, для которых $f^{(k)} \in C$; $\omega_k(f,\delta)$ $(0 \leqslant \delta \leqslant 1)$ — модуль непрерывности k-го порядка функции $f \in C$.

$$n \in \mathbb{N}, \qquad \Phi_n = \{\varphi_\nu\}_{\nu=0}^n, \qquad \varphi_\nu \in C,$$

$p_\nu = \sum_{j=0}^{\nu} c_j \varphi_j$ $(\nu = 0,\dots,n)$, $\operatorname{lin}\Phi_n$ — линейная оболочка системы Φ_n, случай $\nu \in \mathbf{Z}_+$ не исключается;

$$E(f,\Phi_\nu) = E_\nu(f) = \min_{p_\nu} \|f - p_\nu\| \qquad (f \in C),$$

$p_\nu^*(f)$ — наилучший полином для f (не обязательно единственный):

$$\|f - p_\nu^*(f)\| = E_\nu(f);$$

$0 < \alpha \leqslant k$, ω_α — класс функций $\varphi(\delta)$ $(0 \leqslant \delta \leqslant 1)$, обладающий свойствами $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\delta) \to 0$ $(\delta \to 0)$, $\varphi\uparrow$, $\delta^{-\alpha}\varphi(\delta)$ почти убывает. Заметим, что если $\varphi \in \omega_\alpha$, $0 < \alpha < k$, то (см. [1])

$$\sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{k-1}\,\varphi\Big(\frac{1}{\nu+1}\Big) \leqslant C_k\, n^k\, \varphi\Big(\frac{1}{n+1}\Big). \tag{$*$}$$

Запись $U(\nu) = \mathcal{O}_k\big(V(\nu)\big)$ $(\nu = 0,\dots,n)$ означает, что

$$\exists C_k > 0 \quad \forall \nu = 0,\dots,n \quad U(\nu) \leqslant C_k\, V(\nu).$$

Аналогично $U(\nu) \underset{k}{\asymp} V(\nu)$ означает, что

$$\exists C_k > 0,\ c_k > 0 \quad \forall \nu = 0,\dots,n \quad c_k\, V(\nu) \leqslant U(\nu) \leqslant C_k\, V(\nu).$$

1. Общая оценка уклонения снизу. Пусть $f, g \in C$ и g более гладкая, чем f. Тогда уклонение $\|f - g\|$ можно оценить снизу.

(I) *Пусть* $k \in \mathbb{N}$ *и*

$$\sup_{\delta>0} \frac{\omega_k(f,\delta)}{\omega_k(g,\delta)} > 1.$$

Тогда

$$\|f - g\| \geqslant 2^{-k} \max_{\delta>0} \big\{\omega_k(f,\delta) - \omega_k(g,\delta)\big\}. \tag{1}$$

*) Труды ИММ УрО РАН. 1992. Т. 1. С. 90–96.

Доказательство. В самом деле,

$$\omega_k(f,\delta) \leqslant \omega_k(g,\delta) + \omega_k(f-g,\delta),$$
$$\omega_k(f-g,\delta) \leqslant 2^k\|f-g\|,$$

откуда при любом $\delta > 0$

$$\|f-g\| \geqslant 2^{-k}\{\omega_k(f,\delta) - \omega_k(g,\delta)\}.$$

Беря максимум правой части, получаем (1).

В частности, так как $\omega_k(g,\delta) \leqslant \delta^k\|g^{(k)}\|$, то справедливо предложение

(II) *Пусть* $k \in \mathbb{N}$, $f \in C$, $\delta^{-k}\omega_k(f,\delta) \to \infty$ $(\delta \to 0)$, $g \in C^{(k)}$. *Тогда*

$$\|f-g\| \geqslant 2^{-k}\max_{\delta>0}\{\omega_k(f,\delta) - \delta^k\|g^{(k)}\|\}. \tag{2}$$

Если для некоторой системы Φ_n $g \in \operatorname{lin}\Phi_n$, то оценки (1) и (2) можно сделать более прозрачными. Например, так как для любой $g \in \operatorname{lin}\Phi_n$

$$\|f-g\| \geqslant \|f-p_n^*(f)\| = E_n(f),$$

то достаточно уметь оценивать снизу $E_n(f)$.

Рассмотрим два важных случая, когда Φ_n есть система Бернштейна и когда она есть система Джексона.

2. Системы Бернштейна. Пусть $\mathcal{T}_n$ есть множество тригонометрических полиномов порядка n. Если $g = t_n \in \mathcal{T}_n$, то, имея оценку $\|f-g\|$ сверху, можно оценить сверху $\|g^{(k)}\|$ и $\omega_k(g,\delta)$.

(III) *Пусть* $f \in C$, $k,n \in \mathbb{N}$, $t_n \in \mathcal{T}_n$ *и*

$$\|f-t_n\| \leqslant F_n.$$

Тогда

$$\|t_n^{(k)}\| \leqslant C_k n^k\left\{F_n + \omega_k\left(f,\frac{1}{n+1}\right)\right\}, \tag{3}$$

$$\omega_k(t_n,\delta) \leqslant C_k\min\left\{F_n + \omega_k(f,\delta),\ (n\delta)^k\left(F_n + \omega_k\left(f,\frac{1}{n+1}\right)\right)\right\}. \tag{4}$$

Доказательство. Имеем для $h > 0$

$$\|\Delta_h^k t_n\| \leqslant \|\Delta_h^k f\| + \|\Delta_h^k(t_n - f)\| \leqslant \omega_k(f,h) + 2^k\,F_n. \tag{5}$$

Отсюда, полагая $h = (n+1)^{-1}$, выводим по неравенству Стечкина [2]

$$\|t_n^{(k)}\| \leqslant C_k\,n^k\,\|\Delta_h^k t_n\| \leqslant C_k\,n^k\left\{F_n + \omega_k\left(f,\frac{1}{n+1}\right)\right\},$$
$$\omega_k(t_n,\delta) \leqslant C_k\{F_n + \omega_k(f,\delta)\} \qquad (\delta > 0).$$

Кроме того,

$$\omega_k(t_n,\delta) \leqslant \delta^k\|t_n^{(k)}\| \leqslant C_k(n\delta)^k\left\{F_n + \omega_k\left(f,\frac{1}{n+1}\right)\right\},$$

откуда следуют все утверждения.

Аналогичная, но несколько более слабая оценка справедлива и в значительно более общей ситуации.

Определение. Пусть $k, n \in \mathbb{N}$. Система функций $\Phi_n = \{\varphi_\nu\}$, $\varphi_\nu \in C^{(k)}$ $(\nu = 0, \dots, n)$ называется *системой Бернштейна порядка* k $(\Phi_n \in B^{(k)})$, если

$$\exists C_k > 0 \quad \forall p_\nu \in \mathrm{lin}\Phi_\nu \quad \|p_\nu^{(k)}\| \leqslant C_k\, \nu^k\, \|p_\nu\| \qquad (\nu = 0, \dots, n).$$

Ясно, что для $\Phi_n \in B^{(k)}$ $p_0^{(k)} \equiv 0$, т.е. $p_0 = \mathrm{const}$.

Отметим, что если $0 < k' < k$ и $\Phi_n \in B^{(k)}$, то $\Phi_n \in B^{(k')}$ в силу неравенств Колмогорова между нормами производных произвольной функции, заданной на $\mathbb{R}$ (в частности, на $\mathbb{T}$) [3].

(IV) *Пусть* $k, n \in \mathbb{N}$, $f \in C$, $\Phi_n \in B^{(k)}$, $F_\nu > 0$, $F_\nu \downarrow$, $p_\nu \in \mathrm{lin}\,\Phi_\nu$ $(\nu = 0, \dots, n)$ *и*

$$\|f - p_\nu\| \leqslant F_\nu \qquad (\nu = 0, \dots, n).$$

Тогда

$$\|p_n^{(k)}\| \leqslant C_k \sum_{\nu=0}^{n} (\nu + 1)^{k-1} F_\nu, \tag{6}$$

$$\omega_k(p_n, \delta) \leqslant C_k \min\Big\{F_n + \omega_k(f, \delta),\ \delta^k \sum_{\nu=0}^{n} (\nu + 1)^{k-1} F_\nu\Big\}. \tag{7}$$

Доказательство. Оценка (6) доказывается в точности так же, как лемма 10 из [1], а доказательство (7) такое же, как для (III), только вместо (3) пользуемся оценкой (6).

(V) ("обратная теорема теории приближений") *При тех же предположениях*

$$\omega_k(f, \delta) \leqslant C_k \Big\{E(f, \Phi_n) + \delta^k \sum_{\nu=0}^{n} (\nu + 1)^{k-1} E(f, \Phi_\nu)\Big\}. \tag{8}$$

Если, кроме того, $\delta \geq 1/(n+1)$, *то*

$$\omega_k(f, \delta) \leqslant C_k \delta^k \sum_{\nu=0}^{n} (\nu + 1)^{k-1} E(f, \Phi_\nu). \tag{9}$$

Доказательство. Для доказательства (8) используем оценку

$$\omega_k(f, \delta) \leqslant \omega_k\big(p_n^*(f), \delta\big) + 2^k\, E(f, \Phi_n)$$

и оценку (7) для случая $p_\nu = p_\nu^*(f)$, так что $F_\nu = E(f, \Phi_\nu)$.

Так как при $\delta \geq 1/(n+1)$

$$\delta^k \sum_{\nu=0}^{n} (\nu + 1)^{k-1} E(f, \Phi_\nu) \geq C_k\, E(f, \Phi_n),$$

то отсюда следует (9).

В частности,

$$\omega_k\Big(f, \frac{1}{\nu+1}\Big) \leqslant C_k (\nu + 1)^{-k} \sum_{j=0}^{\nu} (j + 1)^{k-1} E(f, \Phi_j). \tag{10}$$

Отметим частный случай предложения (IV), когда $0 < \alpha < k$, $\varphi \in \omega_\alpha$ и

$$\|f - p_\nu\| \leqslant \varphi\Big(\frac{1}{\nu+1}\Big) \qquad (\nu = 0, \dots, n).$$

В этом случае справедлива оценка $(*)$ и, следовательно,

$$\|p_n^{(k)}\| \leqslant C_k\, n^k\, \varphi\Big(\frac{1}{n+1}\Big). \tag{11}$$

Сопоставляя (II) и (IV), получаем

(VI) *Пусть* $g \in \Phi_n$, $f \in C$. *Тогда*

$$\|f-g\| \geq C_k \max_{\delta>0}\Big\{\omega_k(f,\delta) - \delta^k n^k \sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}E(f,\Phi_\nu)\Big\}. \tag{12}$$

Таким образом, для оценки $\|f-g\|$ снизу достаточно иметь оценки $E(f,\Phi_\nu)$ $(\nu = 0,\dots,n)$ сверху.

3. Неравенство Джексона. Пусть для системы Φ_n и функции $f \in C$ выполняется неравенство Джексона

$$E(f,\Phi_\nu) \leqslant C_k\omega_k\Big(f,\frac{1}{\nu+1}\Big) \qquad (\nu=0,\dots,n). \tag{13}$$

При этих условиях имеется тесная связь между поведением модуля непрерывности $\omega_k(f,\delta)$ и наилучших приближений $\{E(f,\Phi_\nu)\}$ $(\nu=0,\dots,n)$.

(VII) *Пусть* $k,n\in\mathbb{N}$, $\Phi_n \in B^{(k)}$ *и для функции* $f\in C$ *выполняются неравенства Джексона* (13). *Пусть, далее,* $0<\alpha<k$ *и* $\varphi\in\omega_\alpha$. *Тогда условия*

$$\omega_k\Big(f,\frac{1}{\nu+1}\Big) = \mathcal{O}_k\Big(\varphi\Big(\frac{1}{\nu+1}\Big)\Big) \qquad (\nu=0,\dots,n) \tag{14}$$

и

$$E(f,\Phi_\nu) = \mathcal{O}_k\Big(\varphi\Big(\frac{1}{\nu+1}\Big)\Big) \qquad (\nu=0,\dots,n) \tag{15}$$

равносильны.

Доказательство. (14) $\Rightarrow$ (15) в силу (13).

(15) $\Rightarrow$ (14) вытекает из (10), так как для $\varphi\in\omega_\alpha$

$$\frac{1}{(\nu+1)^k}\sum_{j=0}^{\nu}(j+1)^{k-1}\,\varphi\Big(\frac{1}{j+1}\Big) \leqslant C_k\,\varphi\Big(\frac{1}{\nu+1}\Big) \qquad (\nu=0,\dots,n).$$

Следующая теорема является центральной в работе.

(VIII) *Пусть* $k,n\in\mathbb{N}$, $0<\alpha<k$, $\Phi_n\in B^{(k)}$ *и для функции* $f\in C$ *выполняются неравенства*

$$\omega_k\Big(f,\frac{1}{\nu+1}\Big) \geqslant a\,\varphi\Big(\frac{1}{\nu+1}\Big), \qquad E(f,\Phi_\nu) \leqslant A\,\varphi\Big(\frac{1}{\nu+1}\Big) \tag{16}$$

$$(\nu=0,\dots,n),$$

где $\varphi\in\omega_\alpha$. *Тогда*

$$\omega_k\Big(f,\frac{1}{\nu+1}\Big) \leqslant C_{k,\alpha}(a,A)\,\varphi\Big(\frac{1}{\nu+1}\Big), \tag{17}$$

$$E(f,\Phi_\nu) \geq c_{k,\alpha}(a,A)\,\varphi\Big(\frac{1}{\nu+1}\Big) \qquad (\nu=0,\dots,n). \tag{18}$$

(17) вытекает из (VII).

Переходим к доказательству (18). Без ограничения общности можем считать, что $A \geqslant \alpha a/k$. В силу (12)

$$E(f,\Phi_\nu) \geqslant C_k \max_{\delta>0}\Big\{a\,\varphi(\delta) - A\,\delta^k\,\nu^k\,\varphi\Big(\frac{1}{\nu+1}\Big)\Big\},$$

откуда по свойствам $\varphi \in \omega_\alpha$

$$E(f,\Phi_\nu) \geqslant C_k \max_{0<\delta\leqslant 1/(\nu+1)} \left\{ a\big((\nu+1)\delta\big)^\alpha - A\big((\nu+1)\delta\big)^k \right\} \varphi\Big(\frac{1}{\nu+1}\Big).$$

Полагая здесь

$$\delta = \left(\frac{\alpha\, a}{kA}\right)^{1/(k-\alpha)} \frac{1}{\nu+1} \leqslant \frac{1}{\nu+1}\,,$$

находим, что

$$a\big((\nu+1)\delta\big)^\alpha - A\big((\nu+1)\delta\big)^k = \Big(1-\frac{\alpha}{k}\Big)(\alpha a)^{k/(k-\alpha)}(kA)^{-\alpha/(k-\alpha)} > 0,$$

откуда

$$E(f,\Phi_\nu) \geqslant C_{k,\alpha}(a,A)\,\varphi\Big(\frac{1}{\nu+1}\Big) \qquad (\nu = 0,\dots,n).$$

(IX) *Пусть* $k,n \in \mathbb{N}$, $0<\alpha<k$, $\Phi_n \in B^{(k)}$ *и для функции* $f \in C$ *выполняются неравенства* (13), $\varphi \in \omega_\alpha$. *Тогда условия*

$$E(f,\Phi_\nu) \underset{k}{\asymp} \varphi\Big(\frac{1}{\nu+1}\Big)$$

и

$$\omega_k\Big(f,\frac{1}{\nu+1}\Big) \underset{k}{\asymp} \varphi\Big(\frac{1}{\nu+1}\Big)$$

равносильны.

Так же, как в [1].

4. Системы Джексона. Исследуем вопрос о том, при каких ограничениях на систему Φ_n для любой функции $f \in C$ выполняется неравенство Джексона.

Определение. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Система функций Φ_n называется *системой Джексона порядка* k ($\Phi_n \in D^{(k)}$), если

$$\exists C_k > 0 \quad \forall f \in C^{(k)} \quad E(f,\Phi_\nu) \leqslant C_k \frac{\|f^{(k)}\|}{(\nu+1)^k} \qquad (\nu = 0,\dots,n).$$

Для систем $\Phi_n \in D^{(k)}$ справедлива следующая "прямая теорема теории приближений".

(X) *Пусть* $k,n \in \mathbb{N}$, $\Phi_n \in D^{(k)}$. *Тогда*

$$\exists C_k > 0 \quad \forall f \in C \quad E(f,\Phi_\nu) \leqslant C_k\, \omega_k\Big(f,\frac{1}{\nu+1}\Big) \qquad (\nu = 0,\dots,n).$$

Доказательство. Воспользуемся "методом промежуточных приближений". Как установлено в [1], для приближений функции $f \in C$ тригонометрическими полиномами порядка $n \in \mathbf{Z}_+$ справедливы оценки

$$E(f,\mathcal{T}_n) \leqslant C_k \omega_k\left(f,\frac{1}{n+1}\right),$$

$$\|(t_n^*(f))^{(k)}\| \leqslant C_k n^k \omega_k\left(f,\frac{1}{n+1}\right) \qquad (n \in \mathbf{Z}_+). \tag{19}$$

Отсюда

$$E(f,\Phi_n)=\|f-p_n^*(f)\|\leqslant\|f-p_n^*(t_n^*(f))\|\leqslant\|f-t_n^*(f)\|+\|t_n^*(f)-p_n^*(t_n^*(f))\|\leqslant$$
$$\leqslant C_k\left\{\omega_k\Big(f,\frac{1}{n+1}\Big)+\frac{\|t_n^*(f)^{(k)}\|}{(n+1)^k}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant C_k\left\{\omega_k\Big(f,\frac{1}{n+1}\Big)+\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^k\omega_k\Big(f,\frac{1}{n+1}\Big)\right\}\leqslant C_k\,\omega_k\Big(f,\frac{1}{n+1}\Big).$$

Оценка (19) означает, что полиномы $\{t_n^*(f)\}$ не только приближают, но и сглаживают функцию f. Конечно, вместо тригонометрических полиномов можно было бы взять и другие сглаживающие системы функций.

Если $0<k'<k$ и $\Phi_n\in D^{(k)}$, то $\Phi_n\in D^{(k')}$. В самом деле, если $f\in C^{(k')}$, то

$$\omega_k(f,\delta)\leqslant 2^{k-k'}\delta^{k'}\|f^{(k')}\|,$$

откуда по предыдущему предложению

$$E(f,\Phi_\nu)\leqslant C_{k'}\,\frac{\|f^{(k')}\|}{(\nu+1)^{k'}}\,.$$

Для систем $\Phi_n\in B^{(k)}\cap D^{(k)}$ справедливы предложения (VII) и (IX) без дополнительного предположения (13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стечкин С.Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15, № 3. С. 219–242.
2. *Стечкин С.Б.* Обобщение некоторых неравенств С.Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60. С. 1511–1514.
3. *Колмогоров А.Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Уч. зап. МГУ. Математика. 1939. Т. 30, кн. 3. С. 3–16 (см.: *Колмогоров А.Н.* Избранные труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985. — С. 252–263.)