ОЦЕНКА ОСТАТКА РЯДА ФУРЬЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ *)

Введение

Пусть $f(x)$ — суммируемая функция с периодом 2π,

$$s_{n-1}(f) = s_{n-1}(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{0.1}$$

— частичные суммы ее ряда Фурье и

$$R_n(f) = R_n(f,x) = f(x) - s_{n-1}(f,x), \tag{0.2}$$

так что в случае сходимости ряда Фурье к функции f $R_n(f,x)$ есть его n-й остаток.

Через $W^r_\alpha(C)$, где $r > 0$, α — произвольное действительное число ($\alpha \in \mathbb{R}$), будем обозначать класс непрерывных периодических функций f, представимых в виде свертки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_{r,\alpha}(t)\, \varphi(x+t)\, dt, \tag{0.3}$$

где

$$D_{r,\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\Big(kt + \frac{\alpha\pi}{2}\Big), \tag{0.4}$$

а $\varphi(x)$ — измеримая периодическая функция, удовлетворяющая условиям

$$\|\varphi\|_C = \sup_x \bigl|\varphi(x)\bigr| \leqslant 1, \qquad \varphi \perp 1 \quad \Big(\text{т.е. } \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\, dx = 0\Big). \tag{0.5}$$

Аналогично через $W^r_\alpha(L)$ будем обозначать класс суммируемых периодических функций f, представимых в форме (0.3), где измеримая функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям

$$\|\varphi\|_L = \int_{-\pi}^{\pi} \bigl|\varphi(x)\bigr|\, dx \leqslant 1, \qquad \varphi \perp 1. \tag{0.6}$$

В случае натурального r и $\alpha = r$ класс $W^r_\alpha(C)$ (соответственно $W^r_\alpha(L)$) совпадает с классом $W^r(C)$ ($W^r(L)$) непрерывных (суммируемых) функций, у которых существует абсолютно непрерывная $(r-1)$-я производная $f^{(r-1)}(x)$ и $\|f^{(r)}\|_C \leqslant 1$ ($\|f^{(r)}\|_L \leqslant 1$); при этом $\varphi(x) = f^{(r)}(x)$ почти всюду. Если $\alpha = r-1$, то получаем классы функций $\widetilde{W}^r(C)$ и $\widetilde{W}^r(L)$, сопряженные с которыми принадлежат $W^r(C)$ ($W^r(L)$). Для нецелых r эти классы определяются аналогично с помощью производных в смысле Вейля.

Настоящая работа посвящена изучению верхних граней

$$S_n(W^r_\alpha)_C = \sup_{f \in W^r_\alpha(C)} \bigl\|f - s_{n-1}(f)\bigr\|_C\,,$$

$$S_n(W^r_\alpha)_L = \sup_{f \in W^r_\alpha(L)} \bigl\|f - s_{n-1}(f)\bigr\|_L$$

---

*) Труды МИАН СССР. 1980. Т. 145. С. 126–151.

остатков ряда Фурье функции f из классов $W^r_\alpha(C)$ и $W^r_\alpha(L)$ соответственно в равномерной метрике и в метрике L.

Первые асимптотически точные результаты в этом направлении были получены А.Н. Колмогоровым [1] в 1935 г. для случая метрики C. Им доказана следующая

Теорема K. *Для любого натурального r справедлива асимптотическая формула*

$$S_n(W^r)_C = n^{-r}\Big\{\frac{4}{\pi^2}\ln n + O_r(1)\Big\}, \tag{0.7}$$

причем остаточный член в этой формуле зависит от r.

Исследования А.Н. Колмогорова были продолжены В.Т. Пинкевичем [2], С.М. Никольским [3, 4], А.В. Ефимовым [5] и С.А. Теляковским [6]. Этими авторами установлено, что для любого $r > 0$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$S_n(W^r_\alpha)_C = n^{-r}\Big\{\frac{4}{\pi^2}\ln n + O_{r,\alpha}(1)\Big\}, \tag{0.8}$$

где константа в O зависит от r и α.

Асимптотическое изучение $S_n(W^r_\alpha)_L$ было начато С.М. Никольским [7]. Он доказал, что для любого натурального r

$$S_n(W^r)_L = n^{-r}\Big\{\frac{4}{\pi^2}\ln n + O_r(1)\Big\}. \tag{0.9}$$

В совместной работе автора и С.А. Теляковского [8] установлено, что для любого $r > 0$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$S_n(W^r_\alpha)_L = n^{-r}\Big\{\frac{4}{\pi^2}\ln n + O_{r,\alpha}(1)\Big\}. \tag{0.10}$$

Первая асимптотическая оценка $S_n(W^r)_C$, *равномерная относительно r*, была получена И.Г. Соколовым [9]: для любого натурального r

$$S_n(W^r)_C \leqslant n^{-r}\Big\{\frac{4}{\pi^2}\ln n + C\Big\} \qquad (n = 1, 2, \dots), \tag{0.11}$$

где C — абсолютная константа. Зависимость остаточного члена в (0.7) от r изучалась затем С.Г. Селивановой [10] и Г.И. Натансоном [11]. Следующий важный шаг был сделан С.А. Теляковским [12].

Теорема T1. *Пусть $n \geqslant 1$, $r > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$S_n(W^r_\alpha)_C = n^{-r}\left\{\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n+r}{r+1} + \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right| r^{-1} + O(1)\right\} \tag{0.12}$$

равномерно относительно n, r и α. Та же формула справедлива для $S_n(W^r_\alpha)_L$.

Из формулы (0.12) и тривиальной оценки $S_n(W^r_\alpha)_C$ снизу вытекает *точный порядок* поведения $S_n(W^r_\alpha)_C$ во всей области $n \geqslant 1$, $r > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$S_n(W^r_\alpha)_C \asymp n^{-r}\left\{\ln\frac{n+r}{r+1} + \left|\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right| r^{-1} + 1\right\}. \tag{0.13}$$

Для случая $r \geqslant 1$ формулу (0.12) можно переписать в более простом виде:

$$S_n(W^r_\alpha)_C = n^{-r}\left\{\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n+r}{r+1} + O(1)\right\} \qquad (r \geqslant 1) \tag{0.14}$$

с абсолютной константой в O. Асимптотический характер этой формулы ухудшается с ростом r; например, в случае $r = n$ она показывает только, что

$$S_n(W^r_\alpha)_C = O(n^{-n}). \tag{0.15}$$

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы изучить асимптотику $S_n(W^r_\alpha)_C$ и $S_n(W^r_\alpha)_L$ как при $n\to\infty$, так и при $r\to\infty$. Поскольку случай $0<r\leqslant 1$ полностью изучен С.А. Теляковским, я ограничиваюсь исследованием области

$$n\geqslant 1,\quad r\geqslant 1,\quad \alpha\in\mathbb{R}. \tag{0.16}$$

Здесь доказывается следующая

Основная теорема. *Пусть $n\geqslant 1$, $r\geqslant 1$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Тогда*

$$S_n(W^r_\alpha)_C=n^{-r}\Big\{\frac{8}{\pi^2}\,\mathbf{K}(e^{-r/n})+O(r^{-1})\Big\}, \tag{0.17}$$

$$S_n(W^r_\alpha)_L=n^{-r}\Big\{\frac{8}{\pi^2}\,\mathbf{K}(e^{-r/n})+O(r^{-1})\Big\} \tag{0.18}$$

равномерно относительно n, r и α, где

$$\mathbf{K}(q)=\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}}\qquad (0\leqslant q<1) \tag{0.19}$$

есть полный эллиптический интеграл первого рода.

Для больших $r=r(n)$ остаточные члены в формулах (0.17) и (0.18) можно еще значительно улучшить.

Поскольку

$$\mathbf{K}(e^{-r/n})=\frac{1}{2}\,\ln\frac{n+r}{r+1}+O(1)\qquad (n\geqslant 1,\ r\geqslant 1) \tag{0.20}$$

с абсолютной константой в O, в формуле (0.14) фактически выделен главный член функции $\mathbf{K}(e^{-r/n})$ при $r/n\to 0$. Однако, в отличие от формулы (0.14), остаточный член в формулах (0.17), (0.18) улучшается с ростом r, и они определяют асимптотическое поведение $S_n(W^r_\alpha)$ при $N=\sqrt{n^2+r^2}\to\infty$. Например, из (0.17) вытекает, что в области (0.16)

$$S_n(W^r_\alpha)_C=n^{-r}\,\frac{8}{\pi^2}\,\mathbf{K}(e^{-r/n})\,\big(1+O(\ln^{-1}N)\big). \tag{0.21}$$

В основе работы лежит идея, что коэффициенты $(1+k/n)^{-r}$ $(k=0,1,\dots)$ функции

$$n^r\,R_n(D_{r,\alpha})=\sum_{k=0}^{\infty}\Big(1+\frac{k}{n}\Big)^{-r}\cos\Big((n+k)t+\frac{\alpha\pi}{2}\Big)$$

убывают примерно как геометрическая прогрессия со знаменателем $q=e^{-r/n}$. В соответствии с этим метод доказательства основной теоремы состоит в том, что $R_n(D_{r,\alpha})$ аппроксимируется в метрике L соответствующим остатком ряда Фурье ядра Пуассона

$$P_\alpha(q,t)=\frac{1}{2}\,\cos\frac{\alpha\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}q^k\cos\Big(kt+\frac{\alpha\pi}{2}\Big)$$

при $q=e^{-r/n}$. Тем самым исследование верхних граней $S_n(W^r_\alpha)$ сводится к исследованию в соответствующей метрике верхних граней

$$S_n\big(G_\alpha(q)\big)=\sup_{f\in G_\alpha(q)}\big\|f-s_{n-1}(f)\big\|,$$

где $G_\alpha(q,C)$ $(G_\alpha(q,L))$ есть класс функций $f(x)$, представимых в виде интеграла Пуассона

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_\alpha(q,t)\,\varphi(x+t)\,dt,$$

а φ — измеримая функция, $\|\varphi\|_C\leqslant 1$ $(\|\varphi\|_L\leqslant 1)$ и $\varphi\perp 1$.

Аппаратом для решения этой последней задачи служит некоторое видоизменение известной леммы Фейера [13]. Устанавливается, что

$$S_n\bigl(G_\alpha(q)\bigr)_C=q^n\Bigl\{\frac{8}{\pi^2}\,\mathbf{K}(q)+O\bigl(q(1-q)^{-1}n^{-1}\bigr)\Bigr\}\qquad(0<q<1)$$

и что справедлива аналогичная формула в метрике L. Отсюда без труда выводится справедливость основной теоремы.

В заключении заметим, что числовые характеристики экстремальных задач теории приближений, зависящие от нескольких параметров, в настоящее время изучены еще недостаточно и здесь имеется обширное поле для исследований. Трудности такого рода задач, как правило, состоят в том, что различные части области изменения параметров требуют разных подходов. В частности, полное решение рассматриваемой нами задачи об асимптотическом поведении $S_n(W_\alpha^r)$ получается путем объединения теоремы Теляковского T1 и нашей основной теоремы.

§ 1. Общие предложения

Пусть $K(t)$ есть суммируемая функция с периодом 2π и

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\,\cos kt+\beta_k\,\sin kt)\tag{1.1}$$

— ее ряд Фурье. Рассмотрим функции $f(x)$, истокообразно представимые при помощи ядра $K(t)$, т.е. имеющие вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\int_{-\pi}^{\pi}K(t)\,\varphi(x+t)\,dt=\frac{a_0}{2}+K*\varphi,\tag{1.2}$$

где $\varphi(t)$ — суммируемая функция с периодом 2π.

Здесь излагаются некоторые общие предложения, касающиеся приближений суммами Фурье и наилучших приближений функций вида (1.2).

Имеем

$$s_{n-1}(f,x)=\frac{a_0}{2}+\int_{-\pi}^{\pi}s_{n-1}(K,t)\,\varphi(x+t)\,dt\qquad(n=1,2,\ldots),\tag{1.3}$$

$$r_n(f,x)=f(x)-s_{n-1}(f,x)=\int_{-\pi}^{\pi}r_n(K,t)\,\varphi(x+t)\,dt.\tag{1.4}$$

Согласно формуле для нормы линейного функционала в пространстве C

$$\sup_{\|\varphi\|_C\leqslant 1}\bigl\|r_n(f)\bigr\|=\bigl\|r_n(K)\bigr\|_L=\int_{-\pi}^{\pi}\bigl|r_n(K,t)\bigr|\,dt,\tag{1.5}$$

т.е. *для любой функции* $\varphi\in C$

$$\bigl\|r_n(f)\bigr\|_C\leqslant\bigl\|r_n(K)\bigr\|_L\,\|\varphi\|_C\tag{1.6}$$

и константа $\|r_n(K)\|_L$ в этом неравенстве является наилучшей.

Неравенство (1.6) можно усилить в духе классического неравенства Лебега. Так как для любого тригонометрического полинома t_{n-1} порядка $n-1$ $r_n \perp t_{n-1}$, то

$$r_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} r_n(K,t)\,\big(\varphi(x+t) - t_{n-1}(x+t)\big)\,dt,$$

откуда для любой функции $\varphi \in C$

$$\big\|r_n(f)\big\|_C \leqslant \big\|r_n(K)\big\|_L\, E_n(\varphi)_C, \tag{1.7}$$

где

$$E_n(\varphi)_C = \min_{t_{n-1}} \|\varphi - t_{n-1}\|_C$$

есть наилучшее приближение φ в метрике C тригонометрическими полиномами порядка $n-1$. Так как $E_n(\varphi)_C \leqslant \|\varphi\|_C$, то из (1.7) вытекает (1.6) и, следовательно, константа в (1.7) является наилучшей.

Пусть теперь $m \in \mathbb{N}$ и C_m есть подпространство пространства C, состоящее из функций $\varphi \perp t_{m-1}$ для любого t_{m-1}. В силу теоремы двойственности (см. С.М. Никольский [7])

$$\sup_{\substack{\|\varphi\|_C \leqslant 1 \\ \varphi \perp t_{m-1}}} \big\|r_n(f)\big\|_C = E_m\big(r_n(K)\big) = \min_{t_{m-1}} \big\|r_n(K) - t_{m-1}\big\|_L, \tag{1.8}$$

откуда для любой функции $\varphi \in C_m$

$$\big\|r_n(f)\big\|_C \leqslant E_m\big(r_n(K)\big)_L\, \big\|\varphi\big\|_C \tag{1.9}$$

и константа $E_m\big(r_n(K)\big)_L$ является наилучшей. Отметим, что если $m = 1$, то

$$E_1\big(r_n(K)\big)_L = \min_a \big\|r_n(K) - a\big\|_L, \tag{1.10}$$

а если $m \geqslant n$, то

$$E_m\big(r_n(K)\big)_L = E_m(K)_L \qquad (m \geqslant n). \tag{1.11}$$

В случае $m = n$ из (1.8) вытекает следующее важное неравенство Фавара: *для любой $\varphi \in C$*

$$\big\|r_n(f)\big\|_C \leqslant E_n(K)_L\, \big\|r_n(\varphi)\big\|_C \tag{1.12}$$

и константа $E_n(K)_L$ в этом неравенстве является наилучшей.

В самом деле, класс C_m совпадает с классом функций вида $r_m(\varphi)$, где $\varphi \in C$, и мы имеем

$$r_n\big(r_m(\varphi)\big) = r_n(\varphi) \qquad (n \geqslant m),$$
$$E_m\big(r_n(K)\big)_L = E_m(K)_L \qquad (m \geqslant n),$$

откуда вытекает (1.12).

Ясно, что неравенство (1.7) справедливо для любой функции $\varphi \in C_m$. Заметим, что если $n \geqslant m$, то

$$\sup_{\substack{\|\varphi\|_C \leqslant 1 \\ \varphi \perp t_{m-1}}} \frac{\|r_n(f)\|_C}{E_n(\varphi)_C} = \big\|r_n(K)\big\|_L, \tag{1.13}$$

т.е. при $n \geqslant m$ константа в (1.7) остается наилучшей. В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ и $\varphi \in C$ такова, что

$$\|r_n(f)\|_C \geqslant \big(\|r_n(K)\|_L - \varepsilon\big)\, E_n(\varphi)_C.$$

Положим $\varphi_0 = r_m(\varphi) \in C_m$. Тогда $f_0 = K * \varphi_0 = r_m(f)$,

$$r_n(f_0) = r_n(f), \qquad E_n(\varphi_0)_C = E_n(\varphi)_C,$$

т.е.

$$\|r_n(f_0)\|_C \geqslant \big(\|r_n(K)\|_L - \varepsilon\big)\, E_n(\varphi_0)_C.$$

В частности, *для любой* $\varphi \in C$, $\varphi \perp 1$,

$$\|r_n(f)\|_C \leqslant \|r_n(K)\|_L\, E_n(\varphi)_C \qquad (n = 1, 2, \dots) \tag{1.14}$$

и константа $\|r_n(K)\|_L$ *в этом неравенстве является наилучшей.*

Наконец, как впервые было замечено автором [14] (с лишним множителем 2) и Сунь Юн-шеном [15], *для любой функции* $\varphi \in C$

$$E_n(f)_C \leqslant E_n(K)_L\, E_n(\varphi)_C. \tag{1.15}$$

Действительно, для любых тригонометрических полиномов T_{n-1} и t_{n-1} порядка $n-1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big(K(t) - T_{n-1}(t)\big)\, \big(\varphi(x+t) - t_{n-1}(x+t)\big)\, dt = f(x) - \tau_{n-1}(x),$$

где τ_{n-1} есть некоторый полином порядка $n-1$, откуда и вытекает (1.15). В частности, из (1.15) следует известное неравенство Фавара: *для любой функции* $\varphi \in C$

$$E_n(f)_C \leqslant E_n(K)_L\, \|\varphi\|_C. \tag{1.16}$$

Константа $E_n(K)_L$ в неравенствах (1.15) и (1.16) в общем случае не будет наилучшей. Однако *если найдется тригонометрический полином* T_{n-1} *такой, что для некоторого* $\beta \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sgn}\big(K(t) - T_{n-1}(t)\big) = \operatorname{sgn}\sin(nt + \beta), \tag{1.17}$$

то константа в неравенствах (1.15) *и* (1.16) *является наилучшей.*

В самом деле, функция $\operatorname{sgn}\sin(nt+\beta)$ как имеющая период $2\pi/n$ ортогональна к любому тригонометрическому полиному t_{n-1} порядка $n-1$. Поэтому для любого t_{n-1}

$$\|K - t_{n-1}\|_L = \int_{-\pi}^{\pi} \big|K(t) - t_{n-1}(t)\big|\, dt \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} \big(K(t) - t_{n-1}\big)\, \operatorname{sgn}\sin(nt+\beta)\, dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \big(K(t) - T_{n-1}(t)\big)\, \operatorname{sgn}\sin(nt+\beta)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \big|K(t) - T_{n-1}(t)\big|\, dt = \|K - T_{n-1}\|_L,$$

т.е.

$$E_n(K)_L = \|K - T_{n-1}\|_L.$$

Далее, полагая $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn}\sin(nt+\beta)$, получаем функцию

$$f_0(x) - \frac{a_0}{2} = \int_{-\pi}^{\pi} K(t)\, \varphi_0(x+t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \big(K(t) - T_{n-1}(t)\big)\, \varphi_0(x+t)\, dt,$$

для которой

$$\Big\| f_0(x) - \frac{a_0}{2} \Big\|_C = \|K - T_{n-1}\|_L,$$

и эта норма достигается с чередующимися знаками в $2n$ точках $x_k = k\pi/n$ $(k = 0, \dots, 2n-1)$. Отсюда

$$E_n(f_0)_C = \|K - T_{n-1}\|_L = E_n(K)_L.$$

Наконец, сглаживая $\varphi_0(t)$ на множестве малой меры и пользуясь абсолютной непрерывностью интеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K - T_{n-1}|\, dt,$$

получаем функцию $\varphi \in C$, для которой

$$E_n(f)_C \geqslant \bigl(E_n(K)_L - \varepsilon\bigr)\, \|\varphi\|_C;$$

следовательно, при выполнении условия (1.17) константа в неравенствах (1.15) и (1.16) является наилучшей.

Аналогичные результаты справедливы и для приближений в метрике L. Мы ограничимся формулировками основных неравенств. Пусть $m = 0, 1, \dots$ и L_m есть подпространство пространства L, состоящее из функций $\varphi \perp t_{m-1}$ для любого t_{m-1}; в частности, $L_0 = L$. Справедливы следующие утверждения

$$\sup_{\|\varphi\|_L \leqslant 1} \|r_n(f)\|_L = \|r_n(K)\|_L. \tag{1.18}$$

Для любой функции $\varphi \in L_m$

$$\|r_n(f)\|_L \leqslant \|r_n(K)\|_L\, E_n(\varphi)_L, \tag{1.19}$$

и при $n \geqslant m$ константа $\|r_n(K)\|_L$ является наилучшей.

Для любой функции $\varphi \in L_m$

$$\|r_n(f)\|_L \leqslant E_m\bigl(r_n(K)\bigr)_L\, \|\varphi\|_L. \tag{1.20}$$

В общем случае константа $E_m\bigl(r_n(K)\bigr)_L$ в этом неравенстве не будет наилучшей. При $m = 1$ предыдущее неравенство было уточнено С.М. Никольским [7]: *для любой функции* $\varphi \in L$, $\varphi \perp 1$,

$$\|r_n(f)\|_L \leqslant \frac{1}{2} \max_h \bigl\| r_n(K, t+h) - r_n(K, t)\bigr\|_L\, \|\varphi\|_L, \tag{1.21}$$

и константа является наилучшей.

Для любой функции $\varphi \in L$

$$\|r_n(f)\|_L \leqslant E_n(K)_L\, \|r_n(\varphi)\|_L, \tag{1.22}$$

$$E_n(f)_L \leqslant E_n(K)_L\, E_n(\varphi)_L. \tag{1.23}$$

Снова в общем случае константы в этих неравенствах не будут наилучшими. Однако, как вытекает из исследований С.М. Никольского [7], они являются наилучшими при выполнении условия (1.17).

§ 2. Оценки норм тригонометрических рядов в метрике L

Из изложенного в § 1 ясно, что исследование верхних граней остатков ряда Фурье для интересующих нас классов функций сводится к оценке выражений

$$\|K_n\|_L, \quad \inf_c \|K_n - c\|_L, \quad \sup_h \frac{1}{2}\, \|K_n(t+h) - K_n(t)\|_L, \tag{2.1}$$

где

$$K_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \cos\Bigl(kt + \frac{\alpha\pi}{2}\Bigr) \tag{2.2}$$

— некоторое специальное ядро, т.е. к оценке норм тригонометрических рядов в метрике L. В этом направлении имеются важные работы Л. Фейера, А.Н. Колмогорова и С.А. Теляковского, на которые мы будем опираться. Сформулируем соответствующие теоремы и выведем из них следствия, удобные для дальнейших ссылок.

Следующая теорема была доказана для косинус-рядов А.Н. Колмогоровым [16] (см. также [17, гл. 14]), для синус-рядов С.А. Теляковским [18] и позволяет получить порядковую оценку $\|K_n\|_L$.

Теорема КТ. *Пусть последовательность* $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, \dots)$ *удовлетворяет условиям*

$$a_n \to 0 \quad (n \to \infty), \qquad \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta^2 a_k| < \infty. \tag{2.3}$$

Тогда тригонометрический ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nt \tag{2.4}$$

является рядом Фурье некоторой функции $f \in L$ *и*

$$\|f\|_L \leqslant C \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,|\Delta^2 a_k|. \tag{2.5}$$

Если, кроме того,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}|a_k| < \infty, \tag{2.6}$$

то тригонометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nt \tag{2.7}$$

является рядом Фурье некоторой функции $g \in L$ *и*

$$\|g\|_L \leqslant C\Big\{\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,|\Delta^2 a_k| + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}|a_k|\Big\}. \tag{2.8}$$

Следствие. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *Если*

$$a_n \to 0 \quad (n \to \infty), \qquad U = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}|a_{n+k}| < \infty, \quad V = \sum_{k=1}^{\infty} k|\Delta^2 a_{n+k}| < \infty, \tag{2.9}$$

то тригонометрический ряд

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos\Big(kt + \frac{\alpha\pi}{2}\Big) \tag{2.10}$$

является рядом Фурье некоторой функции $f \in L$ *и*

$$\|f\|_L \leqslant C(U+V), \tag{2.11}$$

где C *— абсолютная константа.*

В самом деле, рассмотрим тригонометрические ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+1+k} \cos kt \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+1+k} \sin kt.$$

Теорема КТ показывает, что они являются рядами Фурье функций f_n, $g_n \in L$ и что

$$\|f_n\|_L \leqslant CV, \qquad \|g_n\| \leqslant C(U+V). \tag{2.12}$$

Тогда для функции

$$f(t) = f_n(t)\,\cos\Big((n+1)t + \frac{\alpha\pi}{2}\Big) - g_n(t)\,\sin\Big((n+1)t + \frac{\alpha\pi}{2}\Big)$$

справедлива оценка

$$\|f\|_L \leqslant \|f_n\|_L + \|g_n\|_L \leqslant C(U+V),$$

и ряд (2.10) является ее рядом Фурье.

Весьма общая асимптотическая формула для $\|f\|_L$ была получена С.А. Теляковским [19]. Для формулировки его результат положим

$$\xi(u,v) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}|u| & \text{при} \quad |v| \leqslant |u|, \\ |u| \arcsin\Big|\dfrac{u}{v}\Big| + \sqrt{v^2-u^2} & \text{при} \quad |u| \leqslant |v|, \end{cases}$$

так что, в частности,

$$\xi(0,v) = |v|. \tag{2.13}$$

Теорема Т2. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$,

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \tag{2.14}$$

Тогда

$$\|f\|_L = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{m} k^{-1}\xi_k + 2 \sum_{k=2m+1}^{\infty} k^{-1}|b_k| + R_m, \tag{2.15}$$

где

$$\xi_k = \xi\big(b_k, \sqrt{(a_{m-k}-a_{m+k})^2 + (b_{m-k}-b_{m+k})^2}\big), \tag{2.16}$$

$$|R_m| \leqslant C\big\{S_1(a) + S_2(a) + S_3(a) + S_1(b) + S_2(b) + S_3(b)\big\}, \tag{2.17}$$

C — *абсолютная константа,*

$$S_1(a) = \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k|, \qquad q_{i,m} = \min\Big(\Big[\frac{i}{2}\Big],\ \Big[\frac{m-i}{2}\Big]\Big), \tag{2.18}$$

$$S_2(a) = \sum_{i=2}^{m-2} \Bigg| \sum_{k=1}^{q_{i,m}} k^{-1}(\Delta a_{i-k} - \Delta a_{i+k}) \Bigg|, \tag{2.19}$$

$$S_3(a) = \sum_{i=2}^{\infty} \Bigg| \sum_{k=1}^{[i/2]} k^{-1}(\Delta a_{m+i-k} - \Delta a_{m+i+k}) \Bigg|. \tag{2.20}$$

Следствие. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha_k \downarrow 0$, $\Delta^2\alpha_k \geqslant 0 \quad (k = n, n+1, \ldots)$,

$$K_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \, \cos(kt+\beta).$$

Положим

$$
\begin{gathered}
Q_n=\frac{4}{\pi}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{\alpha_k}{k+1+n}+2\,|\sin\beta|\sum_{k=2n}^{\infty}k^{-1}\alpha_k \qquad (\beta\neq p\pi,\quad p\ \textit{целое})\\
Q_n=\frac{4}{\pi}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{\alpha_k}{k+1+n} \qquad (\beta=p\pi).
\end{gathered}
\tag{2.22}
$$

Тогда

$$\|K_n\|_L=Q_n+O(\alpha_n), \tag{2.23}$$

$$\inf_c\|K_n-c\|_L=Q_n+O(\alpha_n), \tag{2.24}$$

$$\sup_h\frac{1}{2}\left\|K(t+h)-K_n(t)\right\|_L=Q_n+O(\alpha_n). \tag{2.25}$$

Доказательство. Для вывода формулы (2.23) положим в теореме Теляковского $m=n-1$,

$$a_k=b_k=0 \qquad (k=0,1,\ldots,n-1),$$

$$a_k=\alpha_k\cos\beta,\quad b_k=a_k\sin\beta \qquad (k=n,n+1,\ldots).$$

Оценим $R_m=R_{n-1}$. Имеем

$$S_q=\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta a_k|=|\cos\beta|\,\alpha_n+|\cos\beta|\sum_{k=n}^{\infty}|\Delta\alpha_k|\leqslant 2\alpha_n\,|\cos\beta|=O(\alpha_n).$$

Замечая, что в сумме S_2

$$i\leqslant m-2=n-3,$$

$$i+k\leqslant i+q_{i,m}\leqslant i+\left[\frac{m-i}{2}\right]\leqslant\frac{1}{2}\,(m+i)\leqslant\frac{1}{2}\,(n-1+n-3)=n-2,$$

убеждаемся, что эта сумма обращается в нуль.

Далее, в сумме $S_3(a)$ в силу выпуклости последовательности $\{a_k\}$ все члены внутренней суммы имеют одинаковые знаки. Поэтому

$$
\begin{aligned}
S_3(a)&=|\cos\beta|\left|\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{[i/2]}k^{-1}(\Delta\alpha_{m+i-k}-\Delta\alpha_{m+i+k})\right|\leqslant\\
&\leqslant\left|\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1}\sum_{i=2k}^{\infty}(\Delta\alpha_{m+i-k}-\Delta\alpha_{m+i+k})\right|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1}(\alpha_{m+k}-\alpha_{m+3k})\right|=\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1}\sum_{i=0}^{2k-1}\Delta\alpha_{m+k+i}\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\alpha_{m+k}=2\alpha_{m+1}=2\alpha_n=O(\alpha_n).
\end{aligned}
$$

Аналогично оцениваются суммы $S_j(b)$ $(j=1,2,3)$, и мы получаем, что

$$R_{n-1}=O(\alpha_n). \tag{2.26}$$

Обратимся к рассмотрению главного члена в формуле (2.15). Так как в сумме

$$\sum_{k=1}^{m}k^{-1}\xi_k$$

$k \leqslant n-1,\ m-k \leqslant n-1$, то в нашем случае

$$\xi_k = \xi\bigl(0, \sqrt{a_{m+k}^2 + b_{m+k}^2}\bigr) = \xi(0, \alpha_{m+k}) = \alpha_{n-1+k}$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{m} k^{-1}\xi_k = \sum_{k=1}^{n-1} k^{-1}\alpha_{n-1+k} = \sum_{k=n}^{2n-2} \frac{\alpha_k}{k+1-n} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{\alpha_k}{k+1-n} + O(\alpha_n). \qquad (2.27)$$

Наконец,

$$\sum_{k=2m+1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} = |\sin\beta| \sum_{k=2n-1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k} = |\sin\beta| \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k} + O(\alpha_n). \qquad (2.28)$$

Сопоставляя формулы (2.26), (2.27) и (2.28), находим окончательно

$$\|K_n\|_L = \frac{4}{\pi} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{\alpha_k}{k+1-n} + 2\,|\sin\beta| \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k} + O(\alpha_n). \qquad (2.29)$$

Переходим к выводу формул (2.24) и (2.25). Так как для любых $h \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2}\bigl\|K_n(t+h) - K_n(t)\bigr\|_L \leqslant \|K_n(t) - c\|_L,$$

то

$$\sup_h \frac{1}{2}\bigl\|K_n(t+h) - K_n(t)\bigr\|_L \leqslant \inf_c \|K_n(t) - c\|_L \leqslant \|K_n\|_L.$$

Поэтому в силу (2.29) достаточно установить, что

$$\sup_h \frac{1}{2}\bigl\|K_n(t+h) - K_n(t)\bigr\|_L \geqslant \frac{1}{2}\bigl\|K_n(t+\pi) - K_n(t)\bigr\|_L \geqslant Q_n + O(\alpha_n).$$

Имеем

$$\frac{1}{2}\bigl\|K_n(t+\pi) - K_n(t)\bigr\|_L = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t+\pi) - K_n(t)|\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{|t|\leqslant\pi/2} |K_n(t+\pi) - K_n(t)|\,dt + \frac{1}{2}\int_{\pi/2\leqslant|t|\leqslant\pi} |K_n(t+\pi) - K_n(t)|\,dt \geqslant$$
$$\geqslant \int_{|t|\leqslant\pi/2} |K_n(t)|\,dt - \int_{\pi/2\leqslant|t|\leqslant\pi} |K_n(t)|\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)|\,dt - 2\int_{\pi/2\leqslant|t|\leqslant\pi} |K_n(t)|\,dt =$$
$$= \|K_n(t)\|_L - 2\int_{\pi/2\leqslant|t|\leqslant\pi} |K_n(t)|\,dt.$$

Оценим последний интеграл. Выполняя преобразования Абеля, получаем

$$K_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \cos(kt+\beta) = \sum_{k=n}^{\infty} \Delta\alpha_k \frac{\sin\bigl((k+1/2)t+\beta\bigr) - \sin\bigl((n-1/2)t+\beta\bigr)}{2\sin(t/2)},$$

откуда

$$\int_{\pi/2\leqslant|t|\leqslant\pi} |K_n(t)|\,dt \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \Delta\alpha_k \int_{\pi/2\leqslant|t|\leqslant\pi} \frac{dt}{\sin(t/2)} = O(\alpha_n).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}\bigl\|K_n(t+\pi) - K_n(t)\bigr\|_L \geqslant \|K_n\|_L + O(\alpha_n) = Q_n + O(\alpha_n),$$

и следствие доказано.

Это следствие позволяет оценивать величины

$$\|K_n\|_L, \quad \inf_c \|K_n - c\|_L, \quad \sup_h \|K_n(t+\pi) - K_n(t)\|_L \tag{2.30}$$

с точностью до $O(\alpha_n)$. В некоторых случаях такая точность недостаточна, и нам понадобится более точный результат, который представляет собой некоторое видоизменение известной леммы Фейера [13].

Лемма 1. *Пусть функции $g(t)$ и $h(t)$ имеют период 2π, $g, h \in \mathrm{V}[-\pi,\pi]$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Положим*

$$\varphi(t) = g(t)\cos(nt+\alpha) + h(t)\sin(nt+\alpha), \tag{2.31}$$

$$r(t) = \sqrt{g^2(t) + h^2(t)}, \qquad K = \mathop{\mathrm{V}}_{-\pi}^{\pi} g + \mathop{\mathrm{V}}_{-\pi}^{\pi} h. \tag{2.32}$$

Тогда

$$J_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r(t)\,dt + O(Kn^{-1}), \tag{2.33}$$

$$J_2 = \inf_c \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t) - c|\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r(t)\,dt + O(Kn^{-1}), \tag{2.34}$$

$$J_3 = \sup_h \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t+h) - \varphi(t)|\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r(t)\,dt + O(Kn^{-1}). \tag{2.35}$$

Доказательство. Так как для любых h и c из $\mathbb{R}$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t+h) - \varphi(t)|\,dt \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t) - c|\,dt,$$

то всегда $J_1 \geqslant J_2 \geqslant J_3$. Поэтому достаточно доказать формулу (2.33) и неравенство

$$J_3 \geqslant \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r(t)\,dt + O(Kn^{-1}). \tag{2.36}$$

Установим справедливость формулы (2.33). Полагая

$$\varphi_k(t) = g\Big(\frac{k\pi}{n}\Big)\cos(nt+\alpha) + h\Big(\frac{k\pi}{n}\Big)\sin(nt+\alpha).$$

получаем

$$J_1 = \sum_{k=-n+1}^{n} \int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} |\varphi(t)|\,dt =$$

$$= \sum_{k=-n+1}^{n} \int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} |\varphi_k(t)|\,dt + O\bigg\{\sum_{k=-n+1}^{n} \int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} |\varphi(t) - \varphi_k(t)|\,dt\bigg\}.$$

Но

$$\int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} |\varphi_k(t)|\,dt = \frac{2}{n}\, r\Big(\frac{k\pi}{n}\Big),$$

$$\int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} |\varphi(t) - \varphi_k(t)|\,dt \leqslant \frac{\pi}{n}\bigg\{\mathop{\mathrm{V}}_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} g + \mathop{\mathrm{V}}_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} h\bigg\}.$$

Поэтому
$$J_1=\frac{2}{\pi}\sum_{k=-n+1}^{n} r\Big(\frac{k\pi}{n}\Big)\,\frac{\pi}{n}+O(Kn^{-1}).$$
Наконец, поскольку $\mathrm{V}_{-\pi}^{\pi}\, r\leqslant \mathrm{V}_{-\pi}^{\pi}\, g+\mathrm{V}_{-\pi}^{\pi}\, h$, то
$$\sum_{k=-n+1}^{n} r\Big(\frac{k\pi}{n}\Big)\,\frac{\pi}{n}=\int_{-\pi}^{\pi} r(t)\,dt+O(Kn^{-1}),$$
и формула (2.33) доказана.

Переходим к доказательству неравенства (2.36). Так как
$$\Big|\varphi\Big(t+\frac{\pi}{n}\Big)-\varphi(t)\Big|=|2\varphi(t)+\Delta g\,\cos(nt+\alpha)+\Delta h\,\sin(nt+\alpha)|,$$
где $\Delta g=g(t+\pi/n)-g(t),\ \Delta h=h(t+\pi/n)-h(t)$, то
$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\varphi\Big(t+\frac{\pi}{n}\Big)-\varphi(t)\Big|\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(t)|\,dt+O\Big\{\int_{-\pi}^{\pi}|\Delta g\,\cos(nt+\alpha)+\Delta h\,\sin(nt+\alpha)|\,dt\Big\}.$$
Но интеграл под знаком O равен
$$\sum_{k=-n+1}^{n}\int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n}=O\Big\{\sum_{k=-n+1}^{n}\frac{\pi}{n}\Big(\mathop{\mathrm{V}}_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} g+\mathop{\mathrm{V}}_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} h\Big)\Big\}=O(Kn^{-1}).$$
Отсюда, используя формулу (2.33), выводим
$$J_3\geqslant\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\varphi\Big(t+\frac{\pi}{n}\Big)-\varphi(t)\Big|\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(t)|\,dt+O(Kn^{-1})=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}r(t)\,dt+O(Kn^{-1}),$$
и лемма доказана.

Утверждение (2.35) этой леммы было сообщено автору С.А. Теляковским.

§ 3. Приближение интеграла Пуассона его суммами Фурье

Пусть $\varphi(x)\in L[-\pi,\pi]$ имеет период 2π, $0<q<1$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Функцию, представимую в виде
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_\alpha(q,t)\,\varphi(x+t)\,dt,\tag{3.1}$$
где
$$P_\alpha(q,t)=\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}q^k\,\cos\Big(kt+\frac{\alpha\pi}{2}\Big),\tag{3.2}$$
будем называть *интегралом Пуассона*. Исследуем поведение верхних граней приближений интеграла Пуассона его суммами Фурье
$$T_0(n,q,\alpha)_C=\sup_{\|\varphi\|_C\leqslant 1}\|f(x)-s_{n-1}(f,x)\|_C,\tag{3.3}$$
$$T_1(n,q,\alpha)_C=\sup_{\substack{\|\varphi\|_C\leqslant 1\\ \varphi\perp 1}}\|f(x)-s_{n-1}(f,x)\|_C,\tag{3.4}$$
$$T_0(n,q,\alpha)_L=\sup_{\|\varphi\|_L\leqslant 1}\|f(x)-s_{n-1}(f,x)\|_L,\tag{3.5}$$
$$T_1(n,q,\alpha)_L=\sup_{\substack{\|\varphi\|_L\leqslant 1\\ \varphi\perp 1}}\|f(x)-s_{n-1}(f,x)\|_L.\tag{3.6}$$

При этом будем заботится о том, чтобы в рассматриваемых областях изменения параметров n, q и α получались оценки, равномерные относительно этих параметров.

Легко видеть, что эти задачи равносильны следующим задачам о приближении функций, гармонических в круге:

$$\sup_{\|f\|_{C(|r|\leqslant\rho)}\leqslant 1} \|f(r,\theta) - s_{n-1}(f(r,\theta))\|_{C(|r|\leqslant 1)}, \tag{3.7}$$

$$\sup_{\|f\|_{L(|r|\leqslant\rho)}\leqslant 1} \|f(r,\theta) - s_{n-1}(f(r,\theta))\|_{L(|r|\leqslant 1)}. \tag{3.8}$$

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $0 < q < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Положим*

$$Q_n(q) = \frac{4}{\pi^2}\, q^{n-1}\, \ln n + 2\left|\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right|\, \ln\frac{1}{n(1-q)}, \tag{3.9}$$

$$\mathbf{K}(q) = \int_0^{\pi/2} (1 - q^2\sin^2 u)^{-1/2}\, du. \tag{3.10}$$

Тогда:

1) *если $e^{-1/n} \leqslant q < 1$, то*

$$T_0(n,q,\alpha)_C = Q_n(q) + O(1), \tag{3.11}$$

$$T_1(n,q,\alpha)_C = Q_n(q) + O(1); \tag{3.12}$$

2) *если $0 < q \leqslant e^{-1/n}$, то*

$$T_0(n,q,\alpha)_C = q^n\left\{\frac{8}{\pi^2}\,\mathbf{K}(q) + O\Big(\frac{q}{n(1-q)}\Big)\right\}, \tag{3.13}$$

$$T_1(n,q,\alpha)_C = q^n\left\{\frac{8}{\pi^2}\,\mathbf{K}(q) + O\Big(\frac{q}{n(1-q)}\Big)\right\} \tag{3.14}$$

равномерно относительно n, q и α.

Те же формулы справедливы для $T_0(n,q,\alpha)_L$ и $T_1(n,q,\alpha)_L$.

Доказательство. Для функций $f(x)$, представимых в виде интеграла Пуассона, имеем

$$f(x) - s_{n-1}(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big\{P_\alpha(q,t) - s_{n-1}\big(P_\alpha(q,t)\big)\big\}\,\varphi(x+t)\,dt. \tag{3.15}$$

Поэтому (см. § 1)

$$T_0(n,q,\alpha)_C = T_0(n,q,\alpha)_L = \frac{1}{\pi}\,\big\|R_n\big(P_\alpha(q)\big)\big\|_L, \tag{3.16}$$

$$T_1(n,q,\alpha)_C = \inf_c \frac{1}{\pi}\,\big\|R_n\big(P_\alpha(q)\big) - c\big\|_L, \tag{3.17}$$

$$T_1(n,q,\alpha)_L = \sup_h \frac{1}{2\pi}\,\big\|R_n\big(P_\alpha(q),\, t+h\big) - R_n\big(P_\alpha(q),\, t\big)\big\|_L,$$

где

$$R_n\big(P_\alpha(q),\, t\big) = \sum_{k=n}^{\infty} q^k\, \cos\Big(kt + \frac{\alpha\pi}{2}\Big). \tag{3.19}$$

Далее, рассмотрим два случая.

П е р в ы й с л у ч а й: $e^{-1/n} \leqslant q < 1$. Воспользуемся следствием из теоремы Т2, полагая

$$\beta = \alpha\pi/2, \quad \alpha_k = q^k \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

Тогда

$$Q_n = \frac{4}{\pi}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{q^k}{k+1-n} + 2\left|\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right|\sum_{k=2n}^{\infty}\frac{q^k}{k} = \frac{4}{\pi}\,q^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{q^k}{k} + 2\left|\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right|\sum_{k=2n}^{\infty}\frac{q^k}{k} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\,q^{n-1}\Big\{-\ln(1-q) - \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{q^k}{k}\Big\} + 2\left|\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right|\sum_{k=2n}^{\infty}\frac{q^k}{k}.$$

Оценивая ряд через интеграл, получаем

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{q^k}{k} = \int_n^{\infty} q^t\,\frac{dt}{t} + O(n^{-1}) = \int_{\delta}^{\infty} e^{-u}\,\frac{du}{u} + O(n^{-1}),$$

где

$$\delta = n\,\ln(1/q), \qquad 0 < \delta \leqslant 1.$$

Имеем

$$\int_{\delta}^{\infty} e^{-t}\,\frac{dt}{t} = \int_{\delta}^{1}\frac{dt}{t} + O(1) = \ln\frac{1}{\delta} + O(1).$$

Отсюда

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{q^k}{k} = \ln\frac{1}{n\,\ln(1/q)} + O(1), \qquad \sum_{k=2n}^{\infty}\frac{q^k}{k} = \ln\frac{1}{n\,\ln(1/q)} + O(1),$$

$$Q_n = \frac{4}{\pi}q^{n-1}\Big\{\ln n + \ln\ln\frac{1}{q} - \ln(1-q)\Big\} + 2\left|\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right|\,\ln\frac{1}{n(1-q)} + O(1)$$

Но, полагая $q = e^{-\varepsilon}$, где $0 < \varepsilon \leqslant 1/n$, находим

$$\ln\ln(1/q) - \ln(1-q) = \ln\varepsilon - \ln(1-e^{-\varepsilon}) = \ln\varepsilon - \ln\big\{\varepsilon\big(1+O(\varepsilon)\big)\big\} = O(1).$$

Поэтому

$$Q_n = \frac{4}{\pi}\,q^{n-1}\ln n + 2\left|\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right|\,\ln\frac{1}{n(1-q)} + O(1),$$

откуда и следуют формулы (3.11), (3.12).

В т о р о й с л у ч а й: $0 < q \leqslant e^{-1/n}$. Воспользуемся леммой 1. Из формулы (3.19) находим

$$R_n\big(P_\alpha(q), t\big) = q^n\left(g(t)\,\cos\Big(nt + \frac{\alpha\pi}{2}\Big) + h(t)\,\sin\Big(nt + \frac{\alpha\pi}{2}\Big)\right),$$

где

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k\cos kt = \frac{1 - q\,\cos t}{1 - 2q\,\cos t + q^2},$$

$$h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k\sin kt = \frac{q\,\sin t}{1 - 2q\,\cos t + q^2}.$$

Так как функция $g(t)$ четна и монотонно убывает на отрезке $[0,\pi]$ от $(1-q)^{-1}$ до $(1+q)^{-1}$, то

$$\mathop{\mathrm{V}}_{-\pi}^{\pi} g = \frac{4q}{(1+q)(1-q)} \leqslant \frac{4q}{1-q}.$$

Далее, функция $h(t)$ нечетна, удовлетворяет неравенству $|h(t)| \leqslant q(1-q)^{-1}$ и имеет на отрезке $[0,\pi]$ единственный экстремум. Поэтому

$$\mathop{\mathrm{V}}_{-\pi}^{\pi} h \leqslant \frac{4q}{1-q}.$$

Таким образом, мы можем к интегралам (3.16)–(3.18) применить лемму 1, полагая $K = 8q(1-q)^{-1}$. Получаем

$$T_0(n,q,\alpha)_C = T_0(n,q,\alpha)_L = q^n \left\{ \frac{2}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} r(t)\,dt + O\Big(\frac{q}{n(1-q)}\Big) \right\}, \tag{3.20}$$

$$T_1(n,q,\alpha)_C = q^n \left\{ \frac{2}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} r(t)\,dt + O\Big(\frac{q}{n(1-q)}\Big) \right\}, \tag{3.21}$$

$$T_1(n,q,\alpha)_L = q^n \left\{ \frac{2}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} r(t)\,dt + O\Big(\frac{q}{n(1-q)}\Big) \right\}, \tag{3.22}$$

где

$$r(t) = \sqrt{g^2(t) + h^2(t)} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2q\cos t + q^2}}.$$

Но

$$\int_{-\pi}^{\pi} r(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1-2q\cos t + q^2}} = 2\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1-2q\cos t+q^2}} =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{(1+q^2)^2 - 4q\sin^2 u}} = \frac{4}{1+q}\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - \big(4q/(1+q^2)\big)\sin^2 u}} =$$

$$= \frac{4}{1+q}\,\mathbf{K}\Big(\frac{2\sqrt{q}}{1+q}\Big).$$

Кроме того, согласно преобразованию Ландена (см., например, [20, § 22.42])

$$\mathbf{K}\Big(\frac{2\sqrt{q}}{1+q}\Big) = (1+q)\,\mathbf{K}(q).$$

Отсюда окончательно

$$\int_{-\pi}^{\pi} r(t)\,dt = 4\,\mathbf{K}(q). \tag{3.23}$$

Сопоставляя формулы (3.20)–(3.22) и (3.23), получаем соотношения (3.13), (3.14), и теорема доказана.

§ 4. Аппроксимация ядра

В этом параграфе ядро

$$R_n(D_{r,\alpha}) = D_{r,\alpha}(t) - s_{n-1}(D_{r,\alpha},t) = \sum_{k=n}^{\infty} k^{-r}\cos\Big(kt + \frac{\alpha\pi}{2}\Big) \tag{4.1}$$

аппроксимируется ядром

$$R_n\bigl(P_\alpha(q)\bigr) = P_\alpha(q,t) - s_{n-1}\bigl(P_\alpha(q),t\bigr) = \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos\Bigl(kt + \frac{\alpha\pi}{2}\Bigr) \tag{4.2}$$

при $q = e^{-r/n}$. Аппроксимация проводится в метриках L и C. Тем самым с точностью до определенных остаточных членов изучение верхних граней $S_n(W_\alpha^r)$ сводится к задаче о приближении интеграла Пуассона, рассмотренной в § 3.

Лемма 3. *Пусть* $r \geqslant 1$. *Положим*

$$F(x) = x\bigl((1+1/r)(1+x/r)^{-r-2} - e^{-x}\bigr) \qquad (x \geqslant 0). \tag{4.3}$$

Тогда:

1) *найдется* $x_0 > 0$, *что для всех* $r \geqslant 1$

$$F'(x) < 0 \qquad (x > x_0); \tag{4.4}$$

2)
$$\|F\|_{C[0,\infty)} = O(r^{-1}). \tag{4.5}$$

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 < 1$. Положим

$$\varphi_\varepsilon(t) = (1-\varepsilon)t - \ln(1+t) \qquad (t \geqslant 0). \tag{4.6}$$

Покажем, что

$$\varphi_\varepsilon(t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\, t(\varepsilon_0) \qquad (0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0), \tag{4.7}$$

где $t(\varepsilon)$ есть единственный положительный корень уравнения

$$(1-\varepsilon)t = \ln(1+t).$$

Для этого рассмотрим функцию

$$\varepsilon(t) = 1 - t^{-1}\ln(1+t) \qquad (t > 0).$$

Ясно, что $\varepsilon(+0) = 0$, $\varepsilon(\infty) = 1$. Так как

$$\ln(1-u) - \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} u^k < u - \frac{u^2}{2} \qquad (0 < u < 1),$$

то

$$\varepsilon'(t) = -t^2\Bigl\{\ln\Bigl(1 - \frac{t}{1+t}\Bigr) + \frac{t}{1+t}\Bigr\} > 0,$$

$$\varepsilon''(t) = 2t^{-3}\Bigl\{\ln\Bigl(1 - \frac{t}{1+t}\Bigr) + \frac{t}{1+t} + \frac{1}{2}\Bigl(\frac{t}{1+t}\Bigr)^2\Bigr\} < 0$$

для всех $t > 0$. Поэтому функция $\varepsilon(t)$ вогнута, а обратная функция $t(\varepsilon)$ $(0 < \varepsilon < < 1)$ выпукла и $t(+0) = 0$. Отсюда вытекает, что

$$t(\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\, t(\varepsilon_0) \qquad (0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0).$$

Поэтому $\rho_\varepsilon(t) \geqslant 0$ при $t \geqslant t(\varepsilon)$ и, в частности, при

$$t(\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\, t(\varepsilon_0).$$

Заметим, что если $\varepsilon_0 = 3/4$, то $t_0 = t(\varepsilon_0) > 1$.

Докажем утверждение 1). Имеем

$$F'(x) = \Bigl(1 + \frac{1}{r}\Bigr)\Bigl(1 - x - \frac{x}{r}\Bigr)\Bigl(1 + \frac{x}{r}\Bigr)^{-r-3} + (x-1)\,e^{-x} \qquad (x \geqslant 0).$$

Для $x > 1$ это можно переписать в виде

$$F'(x) = -(x-1)\left\{\left(1+\frac{1}{r}\right)\left(1+\frac{1}{r(x-1)}\right)\left(1+\frac{x}{r}\right)^{-r-3} - e^{-x}\right\}. \qquad (4.8)$$

Имеем

$$\left(1+\frac{1}{r}\right)\left(1+\frac{x}{r(x-1)}\right)\left(1+\frac{x}{r}\right)^{-r-3} > \exp\left\{-(r+3)\,\ln\left(1+\frac{x}{r}\right)\right\}. \qquad (4.9)$$

Далее, рассмотрим функцию

$$F_1(x) = x - (r+3)\,\ln\left(1+\frac{x}{r}\right) = (r+3)\left\{\left(1-\frac{3}{r+3}\right)\frac{x}{r} - \ln\left(1+\frac{x}{r}\right)\right\}.$$

Полагая в формуле (4.6)

$$t = \frac{x}{r}, \qquad \varepsilon = \frac{3}{r+3} \leqslant \varepsilon_0 = \frac{3}{4},$$

убеждаемся, что для всех $r \geqslant 1$

$$F_1(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \frac{x}{r} \geqslant \frac{3}{r+3}\,t\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{4}{3}$$

и, в частности, при всех

$$x \geqslant x_0 = 4\,t\left(\frac{3}{4}\right) = 4t_0. \qquad (4.10)$$

Отметим, что в силу сделанного замечания $x_0 > 1$.

Сопоставляя (4.8)–(4.10), убеждаемся, что

$$F'(x) < 0 \qquad (x \geqslant x_0).$$

Переходим к доказательству 2). Имеем

$$F(x) = x\,e^{-x}\left\{\exp\left\{x + \ln\left(1+\frac{1}{r}\right) - (r+2)\,\ln\left(1+\frac{x}{r}\right)\right\} - 1\right\}.$$

Но при $0 \leqslant x \leqslant x_0$

$$x + \ln\left(1+\frac{1}{r}\right) - (r+2)\ln\left(1+\frac{x}{r}\right) = x + O(r^{-1}) - (r+2)\left(\frac{x}{r} + O(r^{-2})\right) =$$
$$= x + O(r^{-1}) - x + O(r^{-1}) = O(r^{-1})$$

и, следовательно,

$$\exp\left\{x + \ln\left(1+\frac{1}{r}\right) - (r+2)\ln\left(1+\frac{x}{r}\right)\right\} = \exp O(r^{-1}) = 1 + O(r^{-1}),$$

откуда

$$F(x) = x\,e^{-x}\,O(r^{-1}) = O(r^{-1}) \qquad (0 \leqslant x \leqslant x_0). \qquad (4.11)$$

Так как $F(x) \to 0$ $(x \to \infty)$ и $F(x)$ убывает при $x \geqslant x_0$, то

$$0 \leqslant F(x) \leqslant F(x_0) \qquad (x \geqslant x_0).$$

Поэтому, используя оценку (4.11), получаем

$$\|F\|_{C[0,\infty)} = \max_{0 \leqslant x \leqslant x_0} |F(x)| = O(r^{-1}),$$

м лемма доказана.

Оценим в метрике L норму n-го остатка ряда Фурье функции

$$\Phi_a(q,t) = D_{r,\alpha}(t) - a\,P_\alpha(q,t) \qquad (4.12)$$

при надлежащем выборе $a=a(n,r)$ и $q=q(n,r)$.

Теорема 2. *Пусть $n\geqslant 1$, $r\geqslant 1$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Положим*

$$a=(e/n)^r,\qquad q=e^{-r/n}. \tag{4.13}$$

Тогда

$$\bigl\|\Phi_a(q)-s_{n-1}\bigl(\Phi_a(q)\bigr)\bigr\|_L=O(r^{-1}n^{-r}). \tag{4.14}$$

Доказательство. Имеем

$$n^r\bigl\{\Phi_a(q)-s_{n-1}\bigl(\Phi_a(q)\bigr)\bigr\}=$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}\left\{\Bigl(\frac{n}{k}\Bigr)^r-q^{k-n}\right\}\cos\Bigl(kt+\frac{\alpha\pi}{2}\Bigr)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left\{\Bigl(\frac{k}{n}\Bigr)^{-r}-q^{k-n}\right\}\cos\Bigl(kt+\frac{\alpha\pi}{2}\Bigr)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\Bigl(1+\frac{k}{n}\Bigr)^{-r}-e^{-rk/n}\right\}\cos\Bigl((n+k)t+\frac{\alpha\pi}{2}\Bigr). \tag{4.15}$$

К этой функции применим следствие из теоремы КТ, положив

$$a_k=\Bigl(\frac{n}{k}\Bigr)^r-q^{k-n}\qquad(k=n+1,n+2,\dots),$$

так что

$$a_{n+k}=\Bigl(1+\frac{k}{n}\Bigr)^{-r}-e^{-rk/n}\qquad(k=1,2,\dots).$$

Поскольку $|\Delta^2 a_{n+1}|\leqslant CU$, получаем, что

$$n^r\bigl\|\Phi_a(q)-s_{n-1}\bigl(\Phi_a(1)\bigr)\bigr\|_L\leqslant C(U+V),$$

где

$$U=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1}\,|a_{n+k}|,\qquad V=\sum_{k=2}^{\infty}k\,|\Delta^2 a_{n+k}|.$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить, что

$$U=\sum_{k=1}^{\infty}k\left|\varphi\Bigl(\frac{k}{n}\Bigr)\right|=O(r^{-1}),\qquad V=\sum_{k=2}^{\infty}k\left|\Delta^2_{1/n}\varphi\Bigl(\frac{k}{n}\Bigr)\right|=O(r^{-1}),$$

где

$$\varphi(x)=(1+x)^{-r}-e^{-rx}.$$

Оценка U. Так как

$$-\frac{x}{1-x}\leqslant\ln(1-x)\leqslant -x\qquad(0\leqslant x<1),$$

то

$$-\frac{k}{n}\leqslant\Bigl(1-\frac{k}{n+k}\Bigr)\leqslant-\frac{k}{n+k}\qquad(k=1,2,\dots).$$

Поэтому

$$0\leqslant\varphi\Bigl(\frac{k}{n}\Bigr)\leqslant e^{rk/(n+k)}-e^{-rk/n}=e^{-rk/n}\bigl(e^{-rk^2/(n(n+k))}-1\bigr). \tag{4.17}$$

Отсюда

$$\varphi\Bigl(\frac{k}{n}\Bigr)=O(rn^{-2}k^2q^k),\quad\text{если}\quad 1\leqslant k\leqslant\frac{2n}{\sqrt{r}}. \tag{4.18}$$

Положим
$$m = [nr^{-1/2}],$$
так что
$$0 \leqslant m \leqslant nr^{-1/2} \leqslant n, \qquad m+1 \geqslant nr^{-1/2}. \tag{4.19}$$
Учитывая положительность $\varphi(k/n)$, выводим
$$U \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}\,\varphi\Big(\frac{k}{n}\Big) + \frac{1}{m+1}\,\varphi\Big(\frac{m+1}{n}\Big) + \sum_{k=m+2}^{\infty} k^{-1}\Big(1+\frac{k}{n}\Big)^{-r} =$$
$$= S_1 + \frac{1}{m+1}\,\varphi\Big(\frac{m+1}{n}\Big) + S_2.$$
Для оценки S_1 воспользуемся соотношением (4.18). Получаем
$$S_1 = O\left(rn^{-2}\sum_{k=1}^{m} kq^k\right) = O\left(rn^{-2}\sum_{k=1}^{\infty} kq^k\right) = O\big(rn^{-2}q(1-q)^{-2}\big).$$
Но
$$(1-e^{-x})^{-1} = O(x^{-1}) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$
откуда
$$(1-q)^{-2} = O(n^2r^{-2}) \qquad (1 \leqslant r \leqslant n)$$
и, следовательно,
$$S_1 = O(rn^{-2}\cdot n^2r^{-2}) = O(r^{-1}) \qquad (1 \leqslant r \leqslant n).$$
Если же $r > n$, то $(1-q)^{-2} = O(1)$ и
$$S_1 = O(rn^{-2}q) = O\left(\frac{1}{r}\Big(\frac{r}{n}\Big)^2 e^{-r/n}\right) = O(r^{-1}) \qquad (r > n).$$
Таким образом,
$$S_1 = O(r^{-1}) \qquad (r \geqslant 1). \tag{4.20}$$
Переходим к оценке S_2. Оценивая сумму через интеграл, находим
$$S_2 = \sum_{k=m+2}^{\infty} k^{-1}\Big(1+\frac{k}{n}\Big)^{-r} \leqslant \int_{(m+1)/n}^{\infty} x^{-1}(1+x)^{-r}\,dx \leqslant \int_{r^{-1/2}}^{\infty} x^{-1}(1+x)^{-r}\,dx,$$
так как согласно (4.19) $(m+1)/n \geqslant r^{-1/2}$. Но имеем
$$\int_{r^{-1/2}}^{\infty} x^{-1}(1+x)^{-r}\,dx = \int_{r^{-1/2}}^{\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)(1+x)^{-r-1}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant (1+r^{1/2})\int_{r^{-1/2}}^{\infty}(1+x)^{-r-1}\,dx = \frac{r^{1/2}+1}{r}\,(1+r^{-1/2})^{-r} = O\big(r^{-1/2}(1+r^{-1/2})^{r}\big).$$
Далее,
$$\big(1+r^{-1/2}\big)^{-r} = \exp\big\{-r\,\ln(1+r^{-1/2})\big\} = O(e^{-\sqrt{r}}).$$
Поэтому
$$S_2 = O(r^{-1/2}\,e^{-\sqrt{r}}) = O(r^{-1}). \tag{4.21}$$

Остается оценить $(m+1)^{-1}\,\varphi\bigl((m+1)/n\bigr)$. Если $r\leqslant n^2$, то $m\geqslant 1$ и $m+1\leqslant$ $\leqslant 2m\leqslant 2nr^{-1/2}$. Поэтому применима оценка (4.18), которая показывает, что

$$(m+1)^{-1}\,\varphi\Bigl(\frac{m+1}{n}\Bigr)=O(n^{-1}r^{1/2}\cdot rn^{-2}\cdot n^2r^{-1}q^{m+1})=O(n^{-1}r^{1/2}e^{-r(m+1)/n})=$$
$$=O(n^{-1}r^{1/2}e^{-\sqrt{r}})=O(n^{-1}r^{-1/2}\cdot re^{-\sqrt{r}})=O(r^{-1})\qquad(1\leqslant r\leqslant n^2).$$

Наконец, если $r\geqslant n^2$, то

$$(m+1)^{-1}\,\varphi\Bigl(\frac{m+1}{n}\Bigr)=\varphi\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr)\leqslant\Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)^{-r}\leqslant$$
$$\leqslant(1+r^{-1/2})^{-r}=O(e^{-\sqrt{r}})=O(r^{-1})\qquad(r\geqslant n^2).\quad(4.22)$$

Сопоставляя оценки (4.20), (4.21) и (4.22), убеждаемся, что

$$U=O(r^{-1})\qquad(r\geqslant 1).\qquad(4.23)$$

О ц е н к а V. Имеем

$$\Delta^2_{1/n}\varphi\Bigl(\frac{k}{n}\Bigr)=n^{-2}\,\varphi''\Bigl(\frac{k+\theta_k}{n}\Bigr),$$

где $0<\theta_k<2$. Поэтому

$$V=\sum_{k=2}^{\infty}k\left|\Delta^2_{1/n}\varphi\Bigl(\frac{k}{n}\Bigr)\right|=\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k}{n}\left|\varphi''\Bigl(\frac{k+\theta_k}{n}\Bigr)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{\infty}\Bigl|\frac{k+\theta_k}{n}\,\varphi''\Bigl(\frac{k+\theta_k}{n}\Bigr)\Bigr|=\frac{r}{n}\sum_{k=2}^{\infty}|F(r\xi_k)|,$$

где $F(x)$ имеет тот же смысл, что в лемме 2, а

$$\frac{k}{n}<\xi_k<\frac{k+2}{n}.$$

Зафиксируем x_0, удовлетворяющее лемме 2, и положим

$$m=[x_0nr^{-1}]+1.$$

Имеем

$$V\leqslant\frac{r}{n}\sum_{k=2}^{m}|F(r\xi_k)|+\frac{r}{n}\sum_{k=m+1}^{\infty}|F(r\xi_k)|=T_1+T_2.$$

По лемме 2

$$T_1=O\Bigl(\frac{r}{n}\cdot\frac{m-1}{r}\Bigr)=O(r^{-1}).\qquad(4.24)$$

Далее, так как $m\geqslant x_0nr^{-1}$, то $rk/n\geqslant x_0$ $(k\geqslant m)$. Поэтому $|F(r\xi_k)|=$ $=F(r\xi_k)\leqslant F(rk/n)$ и

$$T_2\leqslant\frac{r}{n}\sum_{k=m+1}^{\infty}F\Bigl(\frac{rk}{n}\Bigr)\leqslant\int_{rm/n}^{\infty}F(x)\,dx\leqslant\int_{x_0}^{\infty}F(x)\,dx.$$

Последний интеграл легко вычисляется:

$$\int_{x_0}^{\infty}F(x)\,dx=(1+x_0)\Bigl\{\Bigl(1+\frac{x_0}{r}\Bigr)^{-r-1}-e^{-x_0}\Bigr\}+\frac{x_0}{r}\Bigl(1+\frac{x_0}{r}\Bigr)^{-r-1}=$$
$$=O\Bigl\{\Bigl(1+\frac{x_0}{r}\Bigr)^{-r-1}-e^{-x_0}\Bigr\}+O(r^{-1}).$$

Но

$$\Big(1+\frac{x_0}{r}\Big)^{-r-1}=\exp\Big\{-(r+1)\,\ln\Big(1+\frac{x_0}{r}\Big)\Big\}=$$
$$=\exp\Big\{-(r+1)\Big(\frac{x_0}{r}+O\Big(\frac{1}{r^2}\Big)\Big)\Big\}=\exp\{-x_0+O(r^{-1})\}=e^{-x_0}\{1+O(r^{-1})\}.$$

Поэтому

$$T_2\leqslant\int_{x_0}^{\infty}F(x)\,dx=O(r^{-1}),$$
$$V=O(r^{-1}).$$

Теорема доказана.

Для больших r аппроксимацию ядра удобнее проводить в метрике C.

Теорема 3. *Пусть* $n\in\mathbb{N},\ n+1\leqslant r\leqslant n^2,\ \alpha\in\mathbb{R}$. *Тогда*

$$\big\|R_n\big(\Phi_a(q)\big)\big\|_C=O(rn^{-2}e^{-r/n}).\tag{4.25}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2, но значительно проще. Имеем

$$n^r\big\|R_n\big(\Phi_a(q)\big)\big\|_C\leqslant2\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\varphi\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big|,$$

где, как и выше,

$$\varphi(u)=(1+u)^{-r}-e^{-ru}.$$

Положим $m=[nr^{-1/2}]$, так что

$$m\geqslant1,\qquad m+1\leqslant nr^{-1/2}+1\leqslant2nr^{-1/2}.$$

Используя оценку (4.18), получаем

$$S_1=\sum_{k=1}^{m+1}\varphi\Big(\frac{k}{n}\Big)=O\Big(rn^{-2}\sum_{k=1}^{m+1}k^2q^k\Big)=O\Big(rn^{-2}\,\frac{q}{(1-q)^3}\Big),$$

откуда, учитывая, что $(1-q)^{-1}=O(1)$ при $r\geqslant n$,

$$S_1=O(rn^{-2}e^{-r/n}).\tag{4.26}$$

Далее, учитывая положительность $\varphi(u)$ и оценивая ряд через интеграл, находим

$$S_2=\sum_{k=m+2}^{\infty}\varphi\Big(\frac{k}{n}\Big)\leqslant\sum_{k=m+2}^{\infty}\Big(1+\frac{k}{n}\Big)^{-r}\leqslant n\int_{(m+1)/n}^{\infty}(1+x)^{-r}\,dx=$$
$$=\frac{n}{r-1}\Big(1+\frac{m+1}{n}\Big)^{-r+1}=O\big(nr^{-1}(1+r^{-1/2})^{-r+1}\big)=O(nr^{-1}e^{-\sqrt{r}}).$$

Но если $n<r<n^2$, то $1<r/n\leqslant\sqrt{r}$ и

$$\Big(\frac{r}{n}\Big)^3e^{-r/n}\geqslant Cr^{3/2}e^{-\sqrt{r}}\geqslant Cre^{-\sqrt{r}},$$

т.е.

$$nr^{-1}e^{-\sqrt{r}}=O(rn^{-2}e^{-r/n})$$

и, следовательно,
$$S_2 = O(rn^{-2}e^{-r/n}).$$
Отсюда и из (4.26)
$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi\Big(\frac{k}{n}\Big) = O(rn^{-2}e^{-r/n}),$$
и теорема доказана.

Аналогичные оценки для $\|R_n(\Phi_a(q))\|_C$ справедливы и при $r \geqslant n^2$, но они нам не понадобятся.

§ 5. Основные теоремы

Переходим к основной задаче работы — исследованию поведения верхних граней $S_n(W^r_\alpha)_C$ и $S_n(W^r_\alpha)_L$. Начнем с исследования случая больших r.

Теорема 4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r \geqslant n+1$. Тогда*
$$S_n(W^r_\alpha)_C = n^{-r}\left\{\frac{4}{\pi} + O\left(\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-r}\right)\right\} \tag{5.1}$$
равномерно относительно n, r и α. Та же формула справедлива и для $S_n(W^r_\alpha)_L$.

Доказательство основано на том, что при $r \geqslant n+1$ первый отличный от нуля член ряда
$$D_{r,\alpha} - s_{n-1}(D_{r,\alpha}, t) = \sum_{k=n}^{\infty} k^{-r}\,\cos\Big(kt + \frac{\alpha\pi}{2}\Big)$$
является доминирующим. Имеем
$$\Big\|D_{r,\alpha}(t) - s_{n-1}(D_{r,\alpha}, t) - n^{-r}\,\cos\Big(nt + \frac{\alpha\pi}{2}\Big)\Big\|_C \leqslant n^{-r}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(1+\frac{k}{n}\Big)^{-r} \leqslant$$
$$\leqslant n^{-r}\left\{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-r} + n\int_{1/n}^{\infty}(1+x)^{-r}\,dx\right\} = n^{-r}\left\{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-r} + \frac{n}{r-1}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{1-r}\right\} =$$
$$= n^{-r}\Big(2+\frac{1}{n}\Big)\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-r} = O\left(n^{-r}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-r}\right).$$
Отсюда
$$S_n(W^r_\alpha)_C = \sup_{\substack{\|\varphi\|_C\leqslant 1\\ \varphi\perp 1}}\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}\big(D_{r,\alpha}(t) - s_{n-1}(D_{r,\alpha}, t)\big)\,\varphi(x+t)\,dt\right| =$$
$$= \sup_{\substack{\|\varphi\|_C\leqslant 1\\ \varphi\perp 1}}\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} n^{-r}\,\cos\Big(nt + \frac{\alpha\pi}{2}\Big)\,\varphi(x+t)\,dt\right| + O\left(n^{-r}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-r}\right) =$$
$$= n^{-r}\left\{\frac{4}{\pi} + O\left(\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-r}\right)\right\}.$$
Совершенно аналогично устанавливается такая же формула для $S_n(W^r_\alpha)_L$, и теорема доказана.

Отметим, что так как
$$\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) \geqslant \frac{1}{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

то
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-r}=O(e^{-r/(n+1)}). \tag{5.2}$$
Поэтому теорема 4 дает асимптотику $S_n(W^r_\alpha)$ при $r/n\to\infty$.

Изложим теперь основной результат этой работы.

Теорема 5 (основная теорема). *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $r\geqslant 1$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Тогда*
$$S_n(W^r_\alpha)_C=n^{-r}\Big\{\frac{8}{\pi^2}\,\mathbf{K}(e^{-r/n})+O(r^{-1})\Big\} \tag{5.3}$$
равномерно относительно n, r и α. Если, кроме того, $n+1\leqslant r\leqslant n^2$, то
$$S_n(W^r_\alpha)_C=n^{-r}\Big\{\frac{8}{\pi^2}\,\mathbf{K}(e^{-r/n})+O(rn^{-r}e^{-r/n})\Big\} \tag{5.4}$$
равномерно относительно n, r и α в указанной области.

Такие же формулы справедливы и для $S_n(W^r_\alpha)_L$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ — суммируемая функция с периодом 2π, а функции $f(x)=f_{r,\alpha}(x)$ и $F_q(x)=F_{q,\alpha}(x)$ представляются в виде
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_{r,\alpha}(t)\,\varphi(x+t)\,dt, \tag{5.5}$$
$$F_q(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_\alpha(q,t)\,\varphi(x+t)\,dt. \tag{5.6}$$
Из теоремы 2 непосредственно вытекает, что если $n\in\mathbb{N}$, $r\geqslant 1$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $q=$ $=e^{-r/n}$, то для ограниченных функций φ
$$R_n(f,x)=\left(\frac{e}{n}\right)^r R_n(F_q,x)+O(n^{-r}r^{-1}\|\varphi\|_C) \tag{5.7}$$
равномерно относительно x, n, r и α, а для функций $\varphi\in L$
$$\|R_n(f)\|_L=\left(\frac{e}{n}\right)^r \|R_n(F_q)\|_L+O(n^{-r}r^{-1}\|\varphi\|_L) \tag{5.8}$$
равномерно относительно n, r и α.

Аналогично из теоремы 3 вытекает, что если, кроме того, $n+1\leqslant r\leqslant n^2$, то для ограниченных φ
$$R_n(f,x)=\left(\frac{e}{n}\right)^r R_n(F_q,x)+O(n^{-r-2}re^{-r/n}\|\varphi\|_C) \tag{5.9}$$
равномерно относительно x, n, r и α, а для функций $\varphi\in L$
$$\|R_n(f)\|_L=\left(\frac{e}{n}\right)^r \|R_n(F_q)\|_L+O(n^{-r-2}re^{-r/n}\|\varphi\|_L) \tag{5.10}$$
равномерно относительно n, r и α.

Из формулы (5.9) вытекает, что
$$\|R_n(f)\|_C=\left(\frac{e}{n}\right)^r \|R_n(F_q)\|_C+O(n^{-r}r^{-1}\|\varphi\|_L), \tag{5.11}$$
$$\sup_{\substack{\|\varphi\|_C\leqslant 1\\ \varphi\perp 1}}\|R_n(f)\|_C=\left(\frac{e}{n}\right)^r \sup_{\substack{\|\varphi\|_C\leqslant 1\\ \varphi\perp 1}}\|R_n(F_q)\|_C+O(n^{-r}r^{-1}),$$
т.е.
$$S_n(W^r_\alpha)_C=\left(\frac{e}{n}\right)^r S_n\big(G_\alpha(q)\big)_C+O(n^{-r}r^{-1}).$$

Подставляя сюда значение $S_n\big(G_\alpha(q)\big)_C$ из теоремы 1 и учитывая, что $q = e^{-r/n}$, получаем

$$S_n(W^r_\alpha)_C = n^{-r}\Big\{\frac{8}{\pi^2}\,\mathbf{K}(e^{-r/n}) + O(r^{-q}) + O\Big(\frac{q}{n(1-q)}\Big)\Big\},$$

и остается заметить, что для всех $n \in \mathbb{N},\ r \geqslant 1$

$$O\Big(\frac{q}{n(1-q)}\Big) = O(r^{-1}).$$

Аналогично устанавливаются остальные утверждения. При выводе оценки (5.4) следует заметить, что в случае $r \geqslant n+1$

$$\frac{q}{n(1-q)} = O(n^{-1}q) = O(rn^{-2}e^{-r/n}).$$

Теорема доказана.

Отметим, что в случае $r \geqslant n^2$ формулу (5.1) можно записать в виде

$$S_n(W^r_\alpha)_C = n^{-r}\left\{\frac{8}{\pi^2}\,\mathbf{K}(e^{-r/n}) + O\left(\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-r}\right)\right\} \qquad (r \geqslant n^2),$$

аналогичном (5.4).

Совершенно аналогично, переходя в формуле (5.11) к верхним граням по функциям φ, для которых $\|\varphi\|_C \leqslant 1$, получаем

$$\frac{1}{\pi}\,\|D_{r,\alpha}\|_L = n^{-r}\Big\{\frac{8}{\pi^2}\,\mathbf{K}(e^{-r/n}) + O(r^{-1})\Big\}. \tag{5.12}$$

Теорема 6. *Пусть $n \geqslant 1,\ r \geqslant 1,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$S_n(W^r_\alpha)_C = \frac{8}{\pi^2}\,n^{-r}\,\mathbf{K}(e^{-r/n})\,\big\{1 + O\big(\ln^{-1}(n^2+r^2)\big)\big\} \tag{5.13}$$

с абсолютной константой в O.

Доказательство. Пусть $r \geqslant n^{1/2}$. Покажем, что в этой области

$$S_n(W^r_\alpha)_C = \frac{8}{\pi^2}\,n^{-r}\,\mathbf{K}(e^{-r/n})\,\big\{1 + O\big((n^2+r^2)^{-1/4}\big)\big\} \tag{5.14}$$

с абсолютной константой в O.

Так как

$$\mathbf{K}(q) = \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-q^2\sin^2 t}} \geqslant \frac{\pi}{2} \qquad (0 \leqslant q < 1), \tag{5.15}$$

то в силу теоремы 5

$$S_n(W^r_\alpha)_C = \frac{8}{\pi^2}\,\mathbf{K}(e^{-r/n})\,\{1 + O(r^{-1})\}. \tag{5.16}$$

Но если $r \geqslant n^{1/2}$, то

$$r^{-1} = O\big((n^2+r^2)^{-1/4}\big),$$

откуда и вытекает (5.14).

Пусть теперь $1 \leqslant r \leqslant n^{1/2}$. Хорошо известно следующее свойство функции $\mathbf{K}(q)$ (см., например, [20, гл. 22]):

$$\mathbf{K}(q) = \frac{1}{2}\,\ln\frac{1}{1-q} + C + o(1) \qquad (q \to 1-0). \tag{5.17}$$

В частности, отсюда вытекает, что

$$\mathbf{K}(e^{-r/n}) \geqslant \frac{1}{2}\,\ln\frac{n+r}{r} + O(1). \tag{5.18}$$

Кроме того, в силу (5.15) и (5.18) в области $r \leqslant n^{1/2}$

$$\mathbf{K}(e^{-r/n}) \geqslant C\,\ln(n+1) \geqslant C_1\,\ln(n^2+r^2). \tag{5.19}$$

Воспользуемся теоремой T1. Ее утверждение можем записать в виде

$$S_n(W^r_\alpha)_C = n^{-r}\Big\{\frac{8}{\pi^2}\,\mathbf{K}(e^{-r/n}) \;+O(1)\Big\},$$

а если $1 \leqslant r \leqslant n^{1/2}$, то отсюда и из (5.18) вытекает, что

$$S_n(W^r_\alpha)_C = \frac{8}{\pi^2}\,n^{-r}\,K(e^{-r/n})\,\big\{1+O\big(\ln^{-1}(n^2+r^2)\big)\big\}.$$

Сопоставляя эту формулу с (5.14), получаем (5.13) для всех $n \geqslant 1$, $r \geqslant 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и теорема доказана.

Ясно, что такая же формула справедлива для $S_n(W^r_\alpha)_L$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kolmogoroff A.* Zur Grössenordung des Restgliedes Fourierschen reihen differenzierbarer Funktionen // Ann. Math. (2). 1935. V. 36, № 2. P. 521–526.
2. *Пинкевич В.Т.* О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4, № 6. С. 521–528.
3. *Никольский С.М.* Асимптотическая оценка остатка при приближении суммами Фурье // Докл. АН СССР. 1941. Т. 32, № 6. С. 386–389.
4. *Никольский С.М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Труды МИАН СССР. 1945. Т. 15.
5. *Ефимов А.В.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1960. Т. 24, № 2. С. 243–296.
6. *Теляковский С.А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Труды МИАН СССР. 1961. Т. 62. С. 61–97.
7. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1946. Т. 10, № 3. С. 207–256.
8. *Стечкин С.Б., Теляковский С.А.* О приближении дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами в метрике L // Труды МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 20–29.
9. *Соколов И.Г.* Остаточный член ряда Фурье дифференцируемых функций // Докл. АН СССР. 1955. Т. 103, № 1. С. 23–26.
10. *Селиванова И.Г.* Приближение суммами Фурье функций, имеющих производную, удовлетворяющую условию Липшица // Докл. АН СССР. 1955. Т. 105, № 5. С. 909–912.
11. *Натансон Г.И.* Приближение суммами Фурье функций, обладающих различными структурными свойствами на разных частях области определения // Вестн. ЛГУ. 1961. Т. 19. С. 20–35.
12. *Теляковский С.А.* Приближение дифференцируемых функций частными суммами их рядов Фурье // Матем. заметки. 1968. Т. 4, вып. 3. С. 291–300.
13. *Fejer L.* Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen // J. reine und angew. Math. 1910. V. 138. P. 22–53.
14. *Стечкин С.Б.* О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. Т. 20, № 2. С. 197–206.

15. *Сунь Юн-шен.* О наилучшем приближении классов функций, представимых в виде свертки // Докл. АН СССР. 1958. Т. 118, № 2. С. 247–250.
16. *Kolmogoroff A.* Sur l'ordre de grandeur des coefficients de la série de Fourier-Lebesgue // Dull.Acad. pol. Ser. A. Sci.Math. 1923. P. 83–86
17. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. — М.—Л.: ОГИЗ. 1939.
18. *Теляковский С.А.* Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Матем. сб. 1964. Т. 63, № 3(105). С. 426–444.
19. *Теляковский С.А.* Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории аппроксимации // Труды МИАН СССР. 1971. Т. 109. С. 65–97.
20. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Ч. 2. — М.: Физматгиз, 1963.