О СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЯХ МОДУЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СУММЫ*)

Введение

В работе используются следующие обозначения:
$\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел;
$\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел;
$\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел;
$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел;
$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{T}^n$ и $\mathbb{Z}^n$ имеют стандартный смысл;
$C_1, \ldots, C_{61}$ — абсолютные положительные константы;
кроме того, как обычно,

$$\exp(y) = e^y, \quad e(y) = e^{2\pi i y} \quad (y \in \mathbb{R}).$$

Положим

$$f(u) = f_n(u) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu u^\nu \qquad (n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant 2,\ \ \alpha_\nu \in \mathbb{R},\ \ u \in \mathbb{R}),$$

$$S(X) = S_n(X) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant X} e\bigl(f_n(k)\bigr) \qquad (k \in \mathbb{N},\ \ X \in \mathbb{R},\ \ X \geqslant 1). \tag{0.1}$$

Поведение тригонометрических сумм (0.1) и близких к ним сумм тесно связано с поведением средних значений модуля $S(X)$, т.е. интеграла

$$J = J_n(X, l) = \int_{\mathbb{T}^n} |S_n(X)|^{2l} \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n \qquad (l \in \mathbb{R},\ l \geqslant 0) \tag{0.2}$$

как функции от его параметров X, l и n. Для приложений к тригонометрическим суммам нужны достаточно точные оценки J сверху. Наиболее сильные оценки J и соответствующие оценки тригонометрических сумм были получены методом И.М. Виноградова. В монографии И.М. Виноградова [1] относительно величины J доказаны две теоремы: одна из них устанавливает “общую верхнюю границу” для J, а другая дает “упрощенную верхнюю границу” для J (см. теоремы 1 и 4 гл. 4).

Недавно А.А. Карацуба [2] (см. также [3]) получил следующую упрощенную верхнюю границу для J, равномерную по всем параметрам.

Теорема А. *Существует абсолютные положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что для всех*

$$n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant 2,\ \ l \in \mathbb{R},\ \ l \geqslant C_1 n^2 \ln n,\ \ X \in \mathbb{R},\ \ X \geqslant 1$$

имеет место неравенство

$$J_n(X, l) \leqslant n^{C_2 n^3} X^{2l - n(n+1)/2}. \tag{0.3}$$

В настоящей работе область изменения параметров, где действует “общая верхняя граница” для J, расширяется до своих естественных пределов. Именно, здесь доказывается такая

*) Труды МИАН СССР. 1975. Т. 134. С. 283–309.

Теорема 1. *Пусть*

$$n, r \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2, \quad l \in \mathbb{R}, \quad l \geqslant rn, \quad X \in \mathbb{R}, \quad X \geqslant 1. \tag{0.4}$$

Тогда

$$J_n(X, l) \leqslant D(r, n)\, X^{2l - n(n+1)/2 + n^2(1-1/n)^r/2}, \tag{0.5}$$

где

$$D(r, n) = \exp\bigl(C_3 \min(r, n)\, n^2 \ln n\bigr) \tag{0.6}$$

и C_3 *— абсолютная постоянная.*

Для доказательства применяется p-адический вариант метода И.М. Виноградова, изложенный в [2] и [4], и используются идеи и методы [1].

Как обычно, доказательство разбивается на два шага. Сначала для J выводится рекуррентная оценка. Затем путем ее многократного итерирования выводится оценка сверху для J. Наиболее трудным является первый шаг. Он состоит из арифметической и аналитической частей. Основная арифметическая часть рассуждений сравнительно с [2] не изменяется, и нужный нам результат изложен в виде леммы 1. В аналитической части доказательства некоторые оценки приходится проводить более аккуратно (лемма 2). В целом рекуррентная оценка получается более точной, чем у предшествующих авторов, и мы сразу же приводим ее к удобному виду (лемма 4). При проведении второго шага тоже потребовались новые соображения (лемма 6). Кроме того, существенно используется теорема A, которая показывает, что при $r \geqslant C_1 n \ln n$ справедливо более сильное утверждение, чем теорема 1.

В качестве приложения выводятся оценки для тригонометрических сумм вида

$$T(Q) = \sum_{P < k \leqslant P+Q} e\bigl(F(k)\bigr), \tag{0.7}$$

где $F(u)$ — n раз дифференцируемая функция. Мы следуем схеме доказательства, указанной И.М. Виноградовым [5, 6]. Сумма $T(Q)$ представляется в виде суммы, слагаемые которой являются тригонометрическими суммами (у нас это “представление по Г. Вейлю” [7, 8]); эти тригонометрические суммы оцениваются через суммы Вейля порядка $n-1$, коэффициенты которых “размазаны” по $\mathbb{T}^{n-1}$; далее, полученные оценки интегрируются по надлежащим областям из $\mathbb{T}^{n-1}$ и складываются; после учета кратности покрытия $\mathbb{T}^{n-1}$ получается оценка $T(Q)$ через J_{n-1} (теорема 3). Эти результаты несколько улучшают известные оценки (см. [9–13]); в частности, они обобщают и уточняют оценки, полученные К.А. Родосским [14] для малых n. Отметим, что К.А. Родосский значительно усложнил схему доказательства, хотя на самом деле в этом не было надобности.

Полученные оценки сравниваются с оценками Ван дер Корпута. Выясняется, что при некоторых соотношениях между параметрами теорема 3 дает лучшие результаты, начиная с $n = 9$.

Отметим, что аналогично тому, как это сделано в настоящей работе для теоремы о среднем, можно расширить области изменения параметров и улучшить константы в ряде теорем А.А. Карацубы, оценивающих число решений некоторых систем сравнений и смешанных систем уравнений и сравнений (см. [15, 16]).

§ 1. Основные свойства J

Перечислим основные свойства интеграла J, которые будут использоваться в дальнейшем (см. [9, 4]).

1) *Если* $0 \leqslant l \leqslant l_1$, *то*

$$J_n(X, l_1) \leqslant X^{2(l_1-l)} J_n(X, l) \qquad (X \geqslant 1),$$

в частности, справедлива “тривиальная оценка”

$$J_n(X, l) \leqslant X^{2l}.$$

Воспользоваться оценкой $|S_n(X)| \leqslant X$.

2) *Если* $0 \leqslant l_0 \leqslant l \leqslant l_1$, $l = (1-t)l_0 + tl_1$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, *то*

$$J_n(X, l) \leqslant \big(J_n(X, l_0)\big)^{1-t}\big(J_n(X, l_1)\big)^t \qquad (X \geqslant 1).$$

Применить неравенство Гёльдера.

Наиболее важными являются свойства J, когда $l \in \mathbb{N}$. Это связано с тем, что в этом случае J имеет следующий простой арифметический смысл.

3) *Если* $l \in \mathbb{N}$, *то* J *равно числу решений системы диофантовых уравнений*

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{l} x_j^\nu = \sum_{j=1}^{l} y_j^\nu \qquad (v = 1, \dots, n), \\ x_j, y_j \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant x_j \leqslant X, \quad 1 \leqslant y_j \leqslant X \qquad (j = 1, \dots, l). \end{gathered} \tag{1.1}$$

Записать J в виде

$$J = \int_{\mathbb{T}^n} S^l(X)\, \overline{S^l(X)}\, d\alpha_1 \dots d\alpha_n$$

и вычислить интеграл. Обзор исследований, относящихся к системе (1.1), см. в [17, гл. 24] и [12, гл. 4].

Следующее важное свойство систем (1.1) и подобных им систем мы будем называть *свойством сдвига*.

4) *Пусть* $a \in \mathbb{Z}$. *Тогда число решений системы*

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{l} (x_j - a)^\nu = \sum_{j=1}^{l} (y_j - a)^\nu, \\ x_j, y_j \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant x_j \leqslant X, \quad 1 \leqslant y_j \leqslant X \qquad (j = 1, \dots, l) \end{gathered}$$

не зависит от a *и равно* $J_n(X, l)$.

См. [2] или [4].

5) *Пусть* $l, q \in \mathbb{N}$, $\lambda_\nu \in \mathbb{Z}$ $(\nu = 1, \dots, n)$ *и* $J_n(q, l, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *есть число решений системы относительно* $x_j, y_j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{l} x_j^\nu - \sum_{j=1}^{l} y_j^\nu = \lambda_\nu \qquad (\nu = 1, \dots, n), \\ 1 \leqslant x_j \leqslant q, \quad 1 \leqslant y_j \leqslant q \qquad (j = 1, \dots, l). \end{gathered} \tag{1.2}$$

Тогда

$$J_n(q, l, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \leqslant J_n(q, l).$$

Записать число решений системы (1.2) в виде интеграла и оценить его величину.

6) *Если* $l \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant X \leqslant X_1$, *то*

$$J_n(X,l) \leqslant J_n(X_1,l).$$

Вытекает из 3).

7) $J_n(X,n) \leqslant n!X^n$.

См. [9] или [4].

Пусть $p,q \in \mathbb{N}$. Положим

$$U(x) = U_n(x) = \sum_{u=0}^{q-1} e\big(f_n(x+pu)\big), \qquad x \in \mathbb{Z}. \tag{1.3}$$

8) *Если* $l \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}$, *то*

$$\int_{\mathbb{T}^n} |U(x)|^{2l}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n = J_n(q,l).$$

Записать левую часть, как число решений системы диофантовых уравнений, и воспользоваться свойством сдвига (см. [2] или [4]). Это основное свойство, на котором базируются оценки J.

§ 2. Реккурентная оценка для J

Пусть

$$n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad l \geqslant 0, \quad p,q \in \mathbb{N}.$$

Как и в § 1, положим

$$U(x) = U_n(x) = \sum_{u=0}^{q-1} e\big(f_n(x+pu)\big), \qquad x \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

Так как

$$S_n(pq) = \sum_{x=1}^{p} U_n(x), \tag{2.2}$$

то имеем

$$J_n(pq, l+n) = \int_{\mathbb{T}^n} \left| \sum_{x=1}^{p} U_n(x) \right|^{2(l+n)} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n. \tag{2.3}$$

Представим этот интеграл в следующем виде:

$$J_n(pq,l+n) = \int_{\mathbb{T}^n} \left| \sum_{x_1,\ldots,x_{l+n}} \prod_{j=1}^{l+n} U(x_j) \right|^2 d\alpha_1 \ldots d\alpha_n =$$

$$= \int_{\mathbb{T}^n} \left| \sum\nolimits^{(1)} \prod_{j=1}^{l+n} U(x_j) + \sum\nolimits^{(2)} \prod_{j=1}^{l+n} U(x_j) \right|^2 d\alpha_1 \ldots d\alpha_n, \tag{2.4}$$

где $x_j \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant x_j \leqslant p$ $(j = 1, \ldots, l+n)$ и в $\sum^{(1)}$ суммирование ведется по всем системам $(x_1, \ldots, x_{l+n})_n$, содержащим по крайней мере n различных чисел, а в $\sum^{(2)}$ — по остальным системам.

Оценка основной чисти J дается следующей леммой.

Лемма 1. *Пусть* $l, n, q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{P}$,

$$n \geqslant 2, \quad p > n, \quad 1 \leqslant q \leqslant p^{n-1}. \tag{2.5}$$

Положим

$$J^{(1)} = \int_{\mathbb{T}^n} \Big| {\sum}^{(1)} \prod_{j=1}^{l+n} U(x_j) \Big|^2 d\alpha_1 \dots d\alpha_n, \tag{2.6}$$

где ${\sum}^{(1)}$ *определена как и выше. Тогда*

$$J^{(1)} \leqslant n! \binom{l+n}{n}^2 p^{2l+n(3n-1)/2} J_n(q,l). \tag{2.7}$$

Эта лемма фактически содержится в лемме 3 из [2] или теореме 1 из [4, с. 94]. Ради полноты приведем ее доказательство.

Доказательство разбивается на несколько шагов.

1. Интеграл $J^{(1)}$ представляет собой число решений следующей системы диофантовых уравнений относительно $x_j, y_j, u_j, v_j \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{l+n} (x_j + p\, u_j)^\nu = \sum_{j=1}^{l+n} (y_j + p\, v_j)^\nu \qquad (v = 1, \dots, n), \\ 1 \leqslant x_j \leqslant p, \quad 1 \leqslant y_j \leqslant p, \quad 0 \leqslant u_j < q, \quad 0 \leqslant v_j < q \qquad (j = 1, \dots, l+n), \end{gathered} \tag{2.8}$$

где каждая из систем $(x_1, \dots, x_{l+n})_n$ и $(y_1, \dots, y_{l+n})_n$ содержит не менее n различных чисел.

Пусть N_n есть число решений системы диофантовых уравнений (2.8), где каждая из систем $(x_1, \dots, x_n)_n$ и $(y_1, \dots, y_n)_n$ состоит из различных чисел. Выделим произвольно n номеров $j_1, \dots, j_n$ из $l+n$ номеров. Это можно сделать $\binom{l+n}{n}$ способами. Так как системы $(x_1, \dots, x_n)_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+l}$ и системы, в которых различные числа занимают номера $j_1, \dots, j_n$, находятся во взаимно однозначном соответствии, и аналогично для систем y, то

$$J^{(1)} \leqslant \binom{l+n}{n}^2 N_n. \tag{2.9}$$

2. Имеем

$$N_n = \int_{\mathbb{T}^n} \Big| \sum_{(x_1, \dots, x_n)_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+l}} \prod_{j=1}^{l+n} U(x_j) \Big|^2 d\alpha_1 \dots d\alpha_n,$$

где системы $(x_1, \dots, x_n)_n$ состоят из n различных чисел, а системы $(x_{n+1}, \dots$ $\dots, x_{n+l})$ произвольны. Поэтому

$$N_n = \int_{\mathbb{T}^n} \Big| \sum_{(x_1, \dots, x_n)_n} \prod_{j=1}^{n} U(x_j) \Big\{ \sum_{x=1}^{p} U(x) \Big\}^l \Big|^2 d\alpha_1 \dots d\alpha_n,$$

и по неравенству Гёльдера

$$N_n \leqslant \int_{\mathbb{T}^n} \Big| \sum_{(x_1, \dots, x_n)_n} \prod_{j=1}^{n} U(x_j) \Big|^2 p^{2l-1} \sum_{x=1}^{p} |U(x)|^{2l} \, d\alpha_1 \dots d\alpha_n = p^{2l-1} \sum_{x=1}^{p} J(x), \tag{2.10}$$

где
$$J(x)=\int_{\mathbb{T}^n}\Bigg|\sum_{(x_1,\ldots,x_n)_n}\prod_{j=1}^{n}U(x_j)U^l(x)\Bigg|^2 d\alpha_1\ldots d\alpha_n \qquad (x\in\mathbb{Z}). \tag{2.11}$$

3. Интеграл $J(x)$ равен числу решений системы диофантовых уравнений относительно $x_j, y_j, u_j, v_j, t_k, z_k \in \mathbb{Z}$:
$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n}(x_j+p\,u_j)^\nu+\sum_{k=1}^{l}(x+p\,t_k)^\nu=\sum_{j=1}^{n}(y_j+p\,v_j)^\nu+\sum_{k=1}^{l}(x+p\,z_k)^\nu \qquad (\nu=1,\ldots,n),\\ 1\leqslant x_j\leqslant p,\quad 1\leqslant y_j\leqslant p,\quad x_j\neq x_{j'},\quad y_j\neq y_{j'}\quad (j\neq j'),\\ 0\leqslant u_j<q,\quad 0\leqslant v_j<q \qquad (j=1,\ldots,n),\\ 0\leqslant t_k<q,\quad 0\leqslant z_k<q \qquad (k=1,\ldots,\eta).\end{gathered} \tag{2.12}$$
Делая замену
$$a_j=x_j+pu_j, \qquad b_j=y_j+pv_j,$$
убеждаемся, что последняя система равносильна системе относительно a_j, b_j, z_k, $t_k\in\mathbb{Z}$
$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n}a_j^\nu-\sum_{j=1}^{n}b_j^\nu=\sum_{k=1}^{l}(x+p\,z_k)^\nu-\sum_{k=1}^{l}(x+p\,t_k)^\nu \qquad (\nu=1,\ldots,n),\\ 1\leqslant a_j\leqslant pq,\quad 1\leqslant b_j\leqslant pq \qquad (j=1,\ldots,n),\\ a_j\not\equiv a_{j'},\quad b_j\not\equiv b_{j'}\,(\mathrm{mod}\ p) \qquad (j\neq j'),\\ 0\leqslant t_k<q,\quad 0\leqslant z_k<q \qquad (k=1,\ldots,l).\end{gathered} \tag{2.13}$$
Далее, по свойству сдвига система (2.13) равносильна системе относительно $a_j, b_j, z_k, t_k\in\mathbb{Z}$
$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n}a_j^\nu-\sum_{j=1}^{n}b_j^\nu=p^\nu\Bigg\{\sum_{k=1}^{l}z_k^\nu-\sum_{k=1}^{l}t_k^\nu\Bigg\} \qquad (\nu=1,\ldots,n),\\ 1-x\leqslant a_j\leqslant pq-x,\quad 1-x\leqslant b_j\leqslant pq-x \qquad (j=1,\ldots,n),\\ a_j\not\equiv a_{j'},\quad b_j\not\equiv b_{j'}\,(\mathrm{mod}\ p) \qquad (j\neq j'),\\ 0\leqslant t_k<q,\quad 0\leqslant z_k<q \qquad (k=1,\ldots,l),\end{gathered} \tag{2.14}$$
так что число решений системы (2.14) равно $J(x)$.

4. Преобразуем систему (2.14) в следующую систему относительно a_j, b_j, z_k, $t_k, \lambda_\nu\in\mathbb{Z}$:
$$\sum_{j=1}^{n}a_j^\nu-\sum_{j=1}^{n}b_j^\nu=p^\nu\lambda_\nu, \tag{2.15}$$
$$\sum_{k=1}^{l}z_k^\nu-\sum_{k=1}^{l}t_k^\nu=\lambda_\nu \qquad (\nu=1,\ldots,n) \tag{2.16}$$
при тех же ограничениях на неизвестные. Обозначим через $N_n(p\lambda_1,\ldots,p^n\lambda_n)$ число решений системы (2.15) при фиксированных $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Число решений

системы (2.16) при фиксированных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ в § 1 было обозначено через $J_n(q, l; \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и там же было отмечено (свойство 5)), что

$$J_n(q, l, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \leqslant J_n(q, l) \qquad (\forall \lambda \in \mathbb{Z}^n). \tag{2.17}$$

Отсюда

$$J(x) = \sum_{\lambda} N_n(p\lambda_1, \ldots, p^n\lambda_n)\, J_n(q, l, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \leqslant \\ \leqslant J_n(q, l) \sum_{\lambda} N_n(p\lambda_1, \ldots, p^n\lambda_n). \tag{2.18}$$

5. Наконец, рассмотрим сумму

$$T' = \sum_{\lambda} N_n(p\lambda_1, \ldots, p^n\lambda_n). \tag{2.19}$$

Она представляет собой число решений системы уравнений относительно a_j, b_j, $\lambda_\nu \in \mathbb{Z}$

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} a_j^\nu - \sum_{j=1}^{n} b_j^\nu = p^\nu \lambda_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \\ 1 - x \leqslant a_j \leqslant pq - x, \quad 1 - x \leqslant b_j \leqslant pq - x, \\ a_j \not\equiv a_{j'}, \quad b_j \not\equiv b_{j'} \pmod p \qquad (j \neq j'). \end{gathered} \tag{2.20}$$

Ясно, что $T' \leqslant T''$, где T'' есть число решений системы сравнений относительно $a_j, b_j \in \mathbb{Z}$

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} a_j^\nu - \sum_{j=1}^{n} b_j^\nu \equiv 0 \pmod{p^\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \\ 1 - x \leqslant a_j \leqslant pq - x, \quad 1 - x \leqslant b_j \leqslant pq - x \qquad (j = 1, \ldots, n), \\ a_j \not\equiv a_{j'} \pmod p \qquad (j \neq j'). \end{gathered} \tag{2.21}$$

Но, как доказал недавно Ю.В. Линник [18] (см. также [10, с. 484, следствие, случай $m = 1$] или [2, лемма 2]), если $p \in \mathbb{P}$, $p > n$ и $q \leqslant p^{n-1}$, то

$$T'' \leqslant n!\, p^{2n^2 - n(n+1)/2}. \tag{2.22}$$

Сопоставляя оценки и формулы (2.9), (2.10), (2.18), (2.19) и (2.22), получаем

$$J^{(1)} \leqslant \binom{l+n}{n}^2 p^{2l-1} \sum_{x=1}^{p} J_n(q, l)\, n!\, p^{2n^2 - n(n+1)/2},$$

что равносильно утверждению леммы.

Лемма 2. *Пусть* $l, n, q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{P}$,

$$n \geqslant 2, \quad p > n, \quad 1 \leqslant q \leqslant p^{n-1}. \tag{2.23}$$

Тогда

$$J_n(pq, l+n) \leqslant (l+n)^{2n} p^{2l + n(3n-1)/2} J_n(q, l) + n^{2(l+n)} p^{2(n-1)} J_n(q, l+n). \tag{2.24}$$

Доказательство. Воспользуемся представлением J в виде (2.4). Так как $|a+b|^2 \leqslant 2(|a|^2 + |b|^2)$, то

$$J_n(pq, l+n) \leqslant 2(J^{(1)} + J^{(2)}), \tag{2.25}$$

где

$$J^{(m)} = \int_{\mathbb{T}} \left| \sum\nolimits^{(m)} \prod_{j=1}^{l+n} U(x_j) \right|^2 d\alpha_1 \dots d\alpha_n \qquad (m = 1, 2). \tag{2.26}$$

Оценка $J^{(1)}$ дается леммой 1.

Оценим $J^{(2)}$. Для этого заметим, что если $x_j \in \mathbb{Z}$, то по неравенству Гёльдера и свойству 8)

$$\int_{\mathbb{T}^n} \left| \prod_{j=1}^{l+n} U(x_j) \right|^2 d\alpha_1 \dots d\alpha_n \leqslant \prod_{j=1}^{l+n} \left\{ \int_{\mathbb{T}^n} |U(x_j)|^{2(l+n)} d\alpha_1 \dots d\alpha_n \right\}^{1/(l+n)} = J_n(q, l+n). \tag{2.27}$$

Но по неравенству Коши

$$\left| \sum\nolimits^{(2)} \prod_{j=1}^{l+n} U(x_j) \right|^2 \leqslant T \sum\nolimits^{(2)} \left| \prod_{j=1}^{l+n} U(x_j) \right|^2,$$

где T — число членов в сумме $\sum^{(2)}$. Отсюда и из (2.27)

$$J^{(2)} \leqslant T \sum\nolimits^{(2)} \int_{\mathbb{T}^n} \left| \prod_{j=1}^{l+n} U(x_j) \right|^2 d\alpha_1 \dots d\alpha_n \leqslant T^2 J_n(q, l+n). \tag{2.28}$$

Оценим T. Из ряда чисел $1, \dots, p$ можно выбрать $n-1$ различных чисел $\binom{p}{n-1}$ способами; выбранные числа можно поместить (с повторениями) на $l+n$ мест не более, чем $(n-1)^{l+n}$ способами. Так как таким путем получится каждая из систем $(x_1, \dots, x_{l+n})$, по которым ведется суммирование в $\sum^{(2)}$, то

$$T \leqslant \binom{p}{n-1} (n-1)^{l+n} \leqslant \frac{(n-1)^{l+n}}{(n-1)!}\, p^{n-1} \leqslant \frac{1}{2}\, n^{l+n}\, p^{n-1}$$

и, следовательно,

$$J^{(2)} \leqslant \frac{1}{4}\, n^{2(l+n)}\, p^{2(n-1)}\, J_n(q, l+n). \tag{2.29}$$

Сопоставляя лемму 1 и неравенства (2.25) и (2.29), находим, что

$$J_n(pq, l+n) \leqslant$$
$$\leqslant 2 \left\{ n! \binom{l+n}{n}^2 p^{2l+n(3n-1)/2} J_n(q, l) + \frac{1}{4} n^{2(l+n)} p^{2(n-1)} J_n(q, l+n) \right\} \leqslant$$
$$\leqslant (l+n)^{2n} p^{2l+n(3n-1)/2} J_n(q, l) + n^{2(l+n)} p^{2(n-1)} J_n(q, l+n),$$

и лемма доказана.

Преобразуем оценку (2.24) к более удобному виду. Нам потребуется следующая лемма о простых числах.

Лемма 3. *Для любого* $x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant 2$, *найдется простое число* p, *удовлетворяющее условиям*

$$x < p \leqslant x \left(1 + \frac{C_4}{\ln x} \right), \tag{2.30}$$

где

$$C_4 = \frac{4}{7} \ln 7 = 1{,}112\ldots; \tag{2.31}$$

константа C_4 *в этом неравенстве является наилучшей и достигается для* $x = 7$.

Доказательство. Б. Россер и Л. Шенфельд [19] установили, что для функции

$$\pi(x) = \sum_{p\in\mathbb{P},\ p\leqslant x} 1$$

справедливы оценки

$$\frac{x}{\ln x - 1/2} < \pi(x) < \frac{x}{\ln x} + \frac{3x}{2\ln^2 x} \qquad (x \geqslant 67). \tag{2.32}$$

Оценим снизу $\pi(y)$ для

$$y = x\left(1 + \frac{10}{9\ln x}\right) \qquad (x \geqslant e^{10}).$$

Согласно (2.32)

$$\pi(y) > \frac{y}{\ln y - 1/2} = \frac{x\left(1+\frac{10}{9\ln x}\right)}{\ln x + \ln\left(1 + \frac{10}{9\ln x}\right)} >$$

$$> \frac{x\left(1+\frac{10}{9\ln x}\right)}{\ln x + \frac{10}{9\ln x} - \frac{1}{2}} = \frac{x\left(1+\frac{10}{9\ln x}\right)}{\ln x}\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}-\frac{10}{9\ln x}\right)\frac{1}{\ln x}} >$$

$$> \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{10}{9\ln x}\right)\left(1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{10}{9\ln x}\right)\frac{1}{\ln x}\right).$$

Но при $x \geqslant e^{10}$

$$\frac{10}{9\ln x} \leqslant \frac{1}{9}, \qquad \frac{1}{2} - \frac{10}{9\ln x} \geqslant \frac{7}{18}$$

и, следовательно,

$$\pi(y) \geqslant \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{10}{9\ln x}\right)\left(1 + \frac{7}{18}\frac{1}{\ln x}\right) >$$

$$> \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{3}{2\ln x}\right) > \pi(x) \qquad (x \geqslant e^{10}). \tag{2.33}$$

Так как $C_4 > 10/9$, то отсюда вытекает, что при $x \geqslant e^{10}$ на интервале $(x,\ x(1 + C_4/\ln x))$ имеется простое число p.

Остается проверить, что при $2 \leqslant x \leqslant e^{10}$ на интервале $(x,\ x(1 + C_4/\ln x)]$ также всегда имеется простое число. Положим $d_n = p_{n+1} - p_n$ и покажем, что

$$d_n \ln p_n \leqslant p_n \qquad (11 \leqslant p_n \leqslant e^{10}). \tag{2.34}$$

Если $p_n \leqslant e^{10} \approx 22026$, то по таблицам простых чисел находим, что $d_n \leqslant 52$ (пара 19 609, 19 661). Поэтому $d_n \ln p_n \leqslant 52 \cdot 10 \leqslant p_n$ при $520 \leqslant p_n \leqslant e^{10}$. Повторяя этот процесс, после нескольких шагов покажем, что справедливо свойство (2.34).

Пусть теперь $11 \leqslant x \leqslant e^{10}$; найдем n из условий $p_n \leqslant x < p_{n+1}$. Тогда в силу (2.34)

$$x\left(1 + \frac{1}{\ln x}\right) \geqslant p_n + \frac{p_n}{\ln p_n} \geqslant p_n + d_n = p_{n+1},$$

т.е.

$$p_{n+1} \in \left(x,\ x\left(1 + \frac{1}{\ln x}\right)\right] \qquad (11 \leqslant x \leqslant e^{10}).$$

Сопоставляя это свойство с (2.33), получаем, что при всех $x \geqslant 11$ найдется $p \in \mathbb{P}$, $p \in (x,\, x(1 + C_4/\ln x)]$.

Наконец, элементарное исследование случая $2 \leqslant x \leqslant 11$ показывает, что самым неблагоприятным является значение $x = 7$, и мы получаем указанную в лемме константу C_4.

Аналогичную лемму, но с заменой C_4 на бо́льшую константу, можно было бы доказать и без вычислений (см. [10]).

Лемма 4. *Пусть* $l, n \in \mathbb{N}$, $X \in \mathbb{R}$,

$$n \geqslant 2, \quad l \geqslant n, \quad X \geqslant n^n. \tag{2.35}$$

Тогда

$$J_n(X, l+n) \leqslant A_l X^{2l/n + (3n-1)/2} J_n(X^{1-1/n}, l) + B_l X^{2(1-1/n)} J_n(X^{1-1/n}, l+n), \tag{2.36}$$

где

$$A_l = \exp\left\{C_5 \frac{l + n^2}{\ln n}\right\}, \qquad B_l = \exp\left\{(2l + C_6 n)\ln n\right\}. \tag{2.37}$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 2, выбрав в ней надлежащим образом параметры p и q. Положим

$$x = \frac{X^{1/n}}{1 - X^{1/n - 1}},$$

так что

$$x > X^{1/n} \geqslant n \geqslant 2, \tag{2.38}$$

и применим лемму 3. Получается, что существует число $p \in \mathbb{P}$, удовлетворяющее условиям

$$x < p \leqslant x\left(1 + \frac{C_4}{\ln x}\right). \tag{2.39}$$

Зафиксируем такое p и положим

$$q = \left[\frac{X}{p}\right] + 1. \tag{2.40}$$

При сделанном выборе p и q имеем

$$X \leqslant pq, \qquad p > X^{1/n} \geqslant n, \tag{2.41}$$

$$q \leqslant \frac{X}{p} + 1 \leqslant \frac{X}{x} + 1 = X^{1-1/n}(1 - X^{1/n - 1}) + 1 = X^{1-1/n} < p^{n-1} \tag{2.42}$$

и так как

$$X^{1/n - 1} \leqslant n^{1-n} \leqslant n^{-1}, \qquad \frac{\ln n}{n-1} \leqslant \ln 2 \qquad (n \geqslant 2),$$

то

$$p \leqslant \frac{X^{1/n}}{1 - X^{1/n-1}}\left(1 + \frac{C_4}{\ln x}\right) \leqslant X^{1/n}\frac{1 + C_4/\ln n}{1 - n^{-1}} =$$
$$= X^{1/n}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\left(1 + \frac{C_4}{\ln n}\right) \leqslant X^{1/n}\exp\left\{\frac{1}{n-1} + \frac{C_4}{\ln n}\right\} =$$
$$= X^{1/n}\exp\left\{\frac{1}{\ln n}\left(C_4 + \frac{\ln n}{n-1}\right)\right\} = X^{1/n}\exp\left\{\frac{C_4 + \ln 2}{\ln n}\right\} = X^{1/n}\exp\left\{\frac{C_7}{\ln n}\right\}, \tag{2.43}$$

где $C_7 = C_4 + \ln 2 = (4/7)\ln 7 + \ln 2 < 2$.

Неравенства (2.41) и (2.42) показывают, что выполнены все условия леммы 2. Применяя эту лемму и учитывая свойства 6), получаем

$$J_n(X, l+n) \leqslant J_n(pq, l+n) \leqslant (l+n)^{2n}\, p^{2l+n(3n-1)/2} J_n(q,l) + \\ + n^{2(l+n)}\, p^{2(n-1)} J_n(q, l+n) \leqslant (l+n)^{2n}\, p^{2l+n(3n-1)/2} J_n(X^{1-1/n}, l) + \\ + n^{2(l+n)} p^{2(n-1)} J_n(X^{1-1/n}, l+n). \quad (2.44)$$

Оценим коэффициенты при J_n в правой части этого неравенства. Используя оценку (2.43), находим

$$(l+n)^{2n}\, p^{2l+n(3n-1)/2} \leqslant (l+n)^{2n} X^{2l/n+(3n-1)/2} \exp\left\{\frac{C_7}{\ln n}\Big(\frac{n}{2}(3n-1)+2l\Big)\right\} \leqslant \\ \leqslant \exp\left\{2n\ln(l+n) + \frac{C_7}{\ln n}\left(2l + \frac{3}{2}n^2\right)\right\} X^{2l/n+(3n-1)/2}.$$

Но по неравенству Юнга $ab \leqslant C_8(a^{3/2}+b^3)\ \ (a, b > 0)$ имеем

$$n\ln n\ln(l+n) \leqslant C_9 \ln n(l+n)^{1/4} \leqslant C_{10}\big((n\ln n)^{3/2} + (l+n)^{3/4}\big) \leqslant C_{11}(l+n^2).$$

Отсюда

$$2n\ln(l+n) + \frac{C_7}{\ln n}\left(2l + \frac{3}{2}n^2\right) \leqslant C_5\frac{l+n^2}{\ln n}$$

и, следовательно,

$$(l+n)^{2n}\, p^{2l+n(3n-1)/2} \leqslant \exp\left\{C_5\frac{l+n^2}{\ln n}\right\} X^{2l/n+(3n-1)/2}. \quad (2.45)$$

Аналогично

$$n^{2(l+n)} p^{2(n-1)} \leqslant n^{2(l+n)} X^{2(1-1/n)} \exp\left\{2(n-1)\frac{C_7}{\ln n}\right\} \leqslant \\ \leqslant \exp\{2l\ln n + C_6 n\ln n\}\, X^{2(1-1/n)}. \quad (2.46)$$

Подставляя эти оценки в неравенство (2.44), получаем утверждение леммы.

Отметим два следствия этой леммы.

Следствие 1 (случай малых l). *Пусть* $n, l \in \mathbb{N},\ X \in \mathbb{R}$,

$$n \geqslant 2, \quad n \leqslant l \leqslant n^2+1, \quad X \geqslant n^n. \quad (2.47)$$

Тогда

$$J_n(X, l+n) \leqslant \exp\left\{C_{12}\frac{n^2}{\ln n}\right\} X^{2l/n+(3n-1)/2} J_n(X^{1-1/n}, l) + \\ + \exp\{C_{13} l\ln n\}\, X^{2(1-1/n)} J_n(X^{1-1/n}, l+n). \quad (2.48)$$

Следствие 2 (случай больших l). *Пусть* $n, l \in \mathbb{N},\ X \in \mathbb{R}$,

$$n \geqslant 2, \quad l \geqslant n^2, \quad X \geqslant n^{2n}. \quad (2.49)$$

Тогда

$$J_n(X, l+n) \leqslant \exp\left\{C_{14}\frac{l}{\ln n}\right\} X^{2l/n+(3n-1)/2} J_n(X^{1-1/n}, l). \quad (2.50)$$

В самом деле, согласно (2.36) при $l \geqslant n^2$

$$J_n(X, l+n) \leqslant \exp\left\{C_{15}\frac{l}{\ln n}\right\} X^{2l/n+(3n-1)/2} J_n(X^{1-1/n}, l) +$$
$$+ \exp\bigl\{(2l + C_6 n)\ln n\bigr\} X^{2(1-1/n)} J_n(X^{1-1/n}, l+n) = K_1 + K_2.$$

Оценим K_2. По свойству 1)

$$J_n(X^{1-1/n}, l+n) \leqslant X^{2n-2} J_n(X^{1-1/n}, l),$$

откуда

$$K_2 \leqslant \exp\bigl\{(2l + C_6 n)\ln n\bigr\} X^{2(n-1/n)} J_n(X^{1-1/n}, l) \leqslant$$
$$\leqslant \exp\bigl\{(2l + C_6 n)\ln n\bigr\} X^{n/2-2l/n+1/2} X^{2l/n+(3n-1)/2} J_n(X^{1-1/n}, l).$$

Но при $l \geqslant n^2$ и $X \geqslant n^{2n}$

$$\exp\bigl\{(2l + C_6 n)\ln n\bigr\} X^{n/2-2l/n+1/2} \leqslant n^{2l+C_6 n+n^2-4l+n} \leqslant$$
$$\leqslant n^{-2l+n^2+(C_6+1)n} \leqslant n^{-n^2+(C_6+1)n} \leqslant C_{16}.$$

Поэтому

$$K_2 \leqslant C_{16}\, X^{2l/n+(3n-1)/2} J_n(X^{1-1/n}, l),$$
$$J_n(X, l+n) \leqslant \exp\left\{C_{14}\frac{l}{\ln n}\right\} X^{2l/n+(3n-1)/2} J_n(X^{1-1/n}, l),$$

и следствие 2 установлено.

§ 3. Общая верхняя граница для J

Нам понадобится одна техническая лемма.

Лемма 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $d \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant d < n$,

$$\sigma_r = \sigma_r(d, n) = 2(rn + d) - \frac{n(n+1)}{2} + \eta\delta^r \qquad (r = 1, 2, \ldots), \tag{3.1}$$

где

$$\delta = 1 - \frac{1}{n}, \quad \eta \geqslant 0, \quad \frac{n^2}{2} - 2d\frac{n}{n-1} \leqslant \eta \leqslant \frac{n^2}{2}. \tag{3.2}$$

Положим

$$g_m = g_m(r, n) = 2n(1 - \delta^m) + \sigma_{r+1}\delta^m \qquad (m = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{3.3}$$

$$g_n = g_n(r) = 2n(1 - \delta^n) + \Bigl(\delta_{r+1} + \frac{\eta}{n}\delta^r\Bigr)\delta^n. \tag{3.4}$$

Тогда

$$g_m \leqslant \sigma_{r+1} - C_{17}\, r\, m \qquad (m = 0, 1, \ldots, n),$$

где

$$C_{17} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Имеем

$$g_m - \sigma_{r+1} = (2n - \sigma_{r+1})(1 - \delta^m) \qquad (m = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Но в силу (3.2)

$$\sigma_1 = 2(n+d) - \frac{n(n+1)}{2} + \eta\,\frac{n-1}{n} \geqslant n,$$

$$\sigma_{r+1} - \sigma_r = 2n - \frac{\eta}{n}\,\delta^r \geqslant 2n - \frac{n}{2} = \frac{3}{2}\,n,$$

откуда

$$\sigma_{r+1} \geqslant \frac{3}{2}rn + \sigma_1 \geqslant \frac{3}{2}rn + n.$$

Поэтому

$$2n - \sigma_{r+1} \leqslant 2n - \frac{3}{2}rn - n \leqslant n - \frac{3}{2}rn \leqslant -\frac{1}{2}rn \tag{3.6}$$

и, следовательно,

$$g_m - \sigma_{r+1} \leqslant -\frac{1}{2}rn(1-\delta^m) \qquad (m = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{3.7}$$

Но в силу выпуклости функции $\varphi(x) = (1-1/n)^x$ $(x \in \mathbb{R})$ справедливо неравенство

$$\varphi(x) \leqslant \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)\,\varphi(0) + \frac{x}{n}\,\varphi(n) \qquad (0 \leqslant x \leqslant n),$$

откуда, поскольку $(1-1/n)^n < e^{-1}$,

$$\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^m \leqslant 1 - \frac{m}{n} + \frac{m}{n}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^n \leqslant 1 - \frac{m}{n} + e^{-1}\frac{m}{n} \qquad (0 \leqslant m \leqslant n).$$

Таким образом,

$$1 - \delta^m \geqslant (1 - e^{-1})\frac{m}{n} \qquad (m = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{3.8}$$

и, значит,

$$g_m - \sigma_{r+1} \leqslant -\frac{1}{2}(1-e^{-1})rm \qquad (m = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{3.9}$$

Рассмотрим теперь случай $m = n$. Имеем

$$g_n - \sigma_{r+1} = (2n - \sigma_{r+1})(1-\delta^n) + \frac{\eta}{n}\,\delta^{r+n},$$

откуда в силу (3.6), (3.2) и (3.8)

$$g_n - \sigma_{r+1} \leqslant -\frac{1}{2}rn(1-\delta^n) + \frac{n}{2}e^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant -\frac{1}{2}rn(1-e^{-1}) + \frac{1}{2e}rn = -\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{e}\Big)rn. \tag{3.10}$$

Сопоставляя неравенства (3.9) и (3.10), получаем, что

$$g_m - \sigma_{r+1} \leqslant -\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{e}\Big)rm \qquad (m = 0, 1, \ldots, n),$$

и лемма доказана.

Теперь мы можем оценить $J_n(X, rn)$ при малых r.

Лемма 6. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $X \in \mathbb{R}$,

$$n \geqslant 2, \quad 1 \leqslant r \leqslant n, \quad X \geqslant 1. \tag{3.11}$$

Тогда

$$J_n(X, rn) \leqslant D_2(r, n)\,X^{\sigma_r}, \tag{3.12}$$

где

$$\sigma_r = 2rn - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2}{2}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^r, \tag{3.13}$$

$$D_2(r,n) = \exp\{C_{18} rn^2 \ln n\}. \tag{3.14}$$

Доказательство. Будем вести его индукцией по r. Так как $\sigma_1 = n$, то согласно свойству 7)

$$J_n(X,n) \leqslant n!\, X^n \leqslant \exp\{C_{19} n^2 \ln n\}\, X^{\sigma_1} \qquad (X \geqslant 1), \tag{3.15}$$

т.е. лемма справедлива при $r = 1$. Допустим, что (3.12) уже установлено для некоторого r, $1 \leqslant r \leqslant n-1$, в форме

$$J(X,rn) \leqslant D_r(a)\, X^{\sigma_r} \qquad (X \geqslant 1), \tag{3.16}$$

где

$$D_r(a) = \exp\{a\, r\, n^2 \ln n\},$$

и оценим $J_n\big(X,(r+1)n\big)$.

По следствию 1 из леммы 4

$$\begin{aligned} J_n\big(X,(r+1)n\big) \leqslant A_r\, X^{2r+(3n-1)/2}\, J_n(X^{1-1/n}, rn) + {}\\ + B_r X^{2(1-1/n)} J_n\big(X^{1-1/n}, (r+1)n\big), \end{aligned} \tag{3.17}$$

где

$$A_r = \exp\{C_{20}\, n^2\}, \qquad B_r = \exp\{C_{21}\, r\, n \ln n\}. \tag{3.18}$$

Пусть

$$b \geqslant e, \quad X \geqslant n^{bn},$$

так что

$$X^{(1-1/n)^{n-1}} \geqslant X^{1/e} \geqslant n^n.$$

Тогда следствие 1 из леммы 4 можно применить $n-1$ раз. Полагая

$$\alpha = 2r + \frac{3n-1}{2}, \quad \delta = 1 - \frac{1}{n}, \quad \beta = 2\delta,$$

получаем

$$J_n\big(X,(r+1)n\big) \leqslant \sum_{m=0}^{n} F_m, \tag{3.19}$$

где

$$\begin{aligned} F_m &= A_r\, B_r^m\, X^{\beta+\ldots+\beta\delta^{m-1}+\alpha\delta^m}\, J_n(X^{\delta^{m+1}}, rn) \qquad (m = 0,1,\ldots,n-1),\\ F_n &= B_r^n X^{\beta+\ldots+\beta\delta^{n-1}} J_n\big(X^{\delta^n}, (r+1)n\big). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Оценим каждое слагаемое из F_m $(m = 0,1,\ldots,n)$. Пусть $0 \leqslant m \leqslant n-1$. Используя (3.16), находим

$$F_m \leqslant A_r\, B_r^m\, D_r(a)\, X^{\beta(1-\delta^m)/(1-\delta)+\alpha\delta^m+\sigma_r\delta^{m+1}}.$$

Но в силу леммы 5 с $d = 0$, $\eta = n^2/2$

$$\begin{aligned} \beta\,\frac{1-\delta^m}{1-\delta} + \alpha\delta^m + \sigma_r\delta^{m+1} = 2(n-1)(1-\delta^m) + \Big(2r + \frac{3n-1}{2} + \sigma_r\delta\Big) = \\ = 2(n-1)(1-\delta^m) + \sigma_{r+1}\delta^m \leqslant g_m \leqslant \sigma_{r+1} - C_{17}\, r\, m \qquad (m = 0,1,\ldots,n-1), \end{aligned}$$

откуда

$$F_m \leqslant A_r\, D_r(a)\, X^{\sigma_{r+1}} (B_r X^{-C_{17} r})^m \qquad (0 \leqslant m \leqslant n-1). \tag{3.21}$$

Аналогично, используя свойство 1), находим

$$F_m \leqslant B_r^n\, X^{\beta(1-\delta^n)/(1-\delta)+2n\delta^n}\, J_n(X^{\delta^n}, rn) \leqslant B_r^n\, D_r(a)\, X^{2(n-1)(1-\delta^n)+2n\delta^n+\sigma_r\delta^n}.$$

Но по лемме 5

$$2(n-1)(1-\delta^n) + 2n\delta^n + \sigma_r\delta^n =$$

$$= 2(n-1)(1-\delta^n) + \sigma_{r+1}\delta^n + \frac{\eta}{n}\delta^{r+n} \leqslant g_n \leqslant \sigma_{r+1} - C_{17} rn,$$

откуда

$$F_n \leqslant D_r(a)\, X^{\sigma_{r+1}} (B_r X^{-C_{17} r})^n.$$

Отсюда, так как $B_r = \exp\{C_{21} rn \ln n\}$ и $X \geqslant \exp(bn\ln n)$, то

$$J_n\big(X, (r+1)n\big) \leqslant A_r\, D_r(a)\, X^{\sigma_{r+1}} \sum_{m=0}^{n} (B_r X^{-C_{17} r})^m =$$

$$= A_r\, D_r(a) X^{\sigma_{r+1}} \sum_{m=0}^{n} \exp\big\{m(C_{21} rn \ln n - C_{17} brn \ln n)\big\} =$$

$$= A_r\, D_r(a)\, X^{\sigma_{r+1}} \sum_{m=0}^{n} \exp\big\{m(C_{21} - C_{17} b) rn\, \ln n\big\}. \tag{3.22}$$

Положим здесь

$$b = C_{22} = \max\left\{e,\ \frac{C_{27}+1}{C_{17}}\right\}.$$

При таком выборе b

$$\sum_{m=0}^{n} \exp\big\{m(C_{21} - C_{17} b) rn \ln n\big\} \leqslant \sum_{m=0}^{n} \exp\{-mrn \ln n\} \leqslant C_{23}$$

и, следовательно,

$$J_n\big(X, (r+1)n\big) \leqslant C_{23}\, A_r\, D_r(a)\, X^{\sigma_{r+1}} \qquad (X \geqslant n^{C_{22} n}). \tag{3.23}$$

Но

$$C_{23} A_r = C_{23} \exp\{C_{20} n^2\} \leqslant \exp\{C_{24} n^2 \ln n\},$$

$$C_{23} A_r\, D_r(a) \leqslant \exp\big\{(C_{24} + ar) n^2 \ln n\big\}.$$

Поэтому, если $a \geqslant C_{24}$, то

$$J_n\big(X, (r+1)n\big) \leqslant \exp\big\{a(r+1) n^2 \ln n\big\}\, X^{\sigma_{r+1}} \qquad (X \geqslant n^{C_{22} n}).$$

Наконец, если $1 \leqslant X \leqslant \exp\{C_{22} n \ln n\}$, то по тривиальной оценке

$$J_n\big(X, (r+1)n\big) \leqslant X^{2(r+1)n} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\big\{2(r+1)n\, C_{22}\, n\, \ln n\big\} \leqslant \exp\big\{2C_{22}(r+1) n^2 \ln n\big\}\, X^{\sigma_{r+1}}.$$

Отсюда вытекает, что если

$$a = C_{25} = \max\{C_{19},\ 2C_{22},\ C_{24}\},$$

то из справедливости (3.16) вытекает справедливость того же неравенства и при $r+1$, т.е. можно положить $a = C_{25}$, и лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть*

$$n, r \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2, \quad l \in \mathbb{R}, \quad l \geqslant rn, \quad X \in \mathbb{R}, \quad X \geqslant 1. \tag{3.24}$$

Тогда

$$J_n(X, l) \leqslant D(r, n) X^{2l - n(n+1)/2 + (n^2/2)(1-1/n)^r}, \tag{3.25}$$

где

$$D(r, n) = \exp\left\{C_3 \min(r, n) n^2 \ln n\right\}. \tag{3.26}$$

Доказательство. Начнем с исследования случая $l = rn$ для больших r. Покажем, что если $r \geqslant n$, то

$$J_n(X, rn) \leqslant \exp\left\{C_{26} \frac{n}{\ln n}(r^2 + n^2 \ln^2 n)\right\} X^{2rn - n(n+1)/2 + (n^2/2)(1-1/n)^r}. \tag{3.27}$$

Пусть $s \in \mathbb{Z}$, $s \geqslant -1$. Положим

$$X_{-1} = 1, \qquad X_s = n^{2n\left(n/(n-1)\right)^s} \qquad (s = 0, 1, \ldots).$$

Рассмотрим сначала случай $X_{s-1} \leqslant X \leqslant X_s \quad (0 \leqslant s \leqslant r-n)$, так что

$$X^{(1-1/n)^s} \leqslant n^{2n} \leqslant X^{(1-1/n)^{s-1}} \qquad (s \geqslant 1).$$

Записывая следствие 2 из леммы 4 в форме

$$\frac{J_n(X, rn)}{X^{2rn - n(n+1)/2}} \leqslant \exp\left\{C_{14} \frac{rn}{\ln n}\right\} \frac{J_n\left(X^{1-1/n}), (r-1)n\right)}{X^{(1-1/n)\left(2(r-1)n - n(n+1)/2\right)}}$$

и применяя его s раз, находим

$$\frac{J_n(X, rn)}{X^{2rn - n(n+1)/2}} \leqslant \exp\left\{C_{14} \frac{srn}{\ln n}\right\} \frac{J_n\left(X^{(1-1/n)^s}, (r-1)n\right)}{X^{(1-1/n)^s\left(2(r-s)n - n(n+1)/2\right)}},$$

откуда по тривиальной оценке

$$\frac{J_n(X, rn)}{X^{2rn - n(n+1)/2}} \leqslant \exp\left\{C_{14} \frac{r^2 n}{\ln n}\right\} X^{(1-1/n)^s n(n+1)/2} \leqslant \exp\left\{C_{27} \frac{n}{\ln n}(r^2 + n^2 \ln^2 n)\right\},$$

т.е.

$$J_n(X, rn) \leqslant \exp\left\{C_{27} \frac{n}{\ln n}(r^2 + n^2 \ln^2 n)\right\} X^{2rn - n(n+1)/2}. \tag{3.28}$$

Отсюда

$$J_n(X, rn) \leqslant \exp\left\{C_{27} \frac{n}{\ln n}(r^2 + n^2 \ln^2 n)\right\} X^{2rn - n(n+1)/2 + (n^2/2)(1-1/n)^r}$$

$$(1 \leqslant X \leqslant X_{r-n}). \tag{3.29}$$

Пусть теперь $X \geqslant X_{r-n}$. Применяя следствие 2 из леммы 4 $r-n$ раз, находим аналогично

$$\frac{J_n(X, rn)}{X^{2rn - n(n+1)/2}} \leqslant \exp\left\{C_{14} \frac{r^2 n}{\ln n}\right\} \frac{J_n(X^{(1-1/n)^{r-n}}, n^2)}{X^{(1-1/n)^{r-n}(2n^2 - n(n+1)/2)}},$$

откуда по лемме 6

$$J_n(X,rn) \leqslant \exp\left\{C_{28}\frac{n}{\ln n}(r^2+n^2\ln^2 n)\right\} X^{2rn-n(n+1)/2+(n^2/2)(1-1/n)^r}$$

$$(X \geqslant X_{r-n}). \quad (3.30)$$

Оценки (3.29) и (3.30) устанавливают справедливость (3.27) для всех $X \geqslant 1$.

Далее, в силу теоремы A теорема 1 верна при $r \geqslant C_1\, n \ln n$, и остается рассмотреть случай $r \leqslant C_1\, n \ln n$.

Неравенство (3.30) показывает, что

$$J_n(X,rn) \leqslant \exp\{C_{29}n^3\ln n\}\, X^{2rn-n(n+1)/2+(n^2/2)(1-1/n)^r}$$

при всех $X \geqslant 1$ и всех r, $n \leqslant r \leqslant C_1 n \ln n$, а лемма 6 — что

$$J_n(X,rn) \leqslant \exp\{C_{18}rn^2\ln n\}\, X^{2rn-n(n+1)/2+(n^2/2)(1-1/n)^r}$$

при всех $X \geqslant 1$ и всех r, $1 \leqslant r \leqslant n$.

Сопоставляя эти результаты, убеждаемся, что

$$J_n(X,rn) \leqslant \exp\left\{C_3\min(r,n)n^2\ln n\right\} X^{2rn-n(n+1)/2+(n^2/2)(1-1/n)^r}$$

для всех $r \geqslant 1$ и всех $X \geqslant 1$.

Наконец, если $l \geqslant rn$, то по свойству 1) для всех $X \geqslant 1$

$$J_n(X,l) \leqslant X^{2(l-rn)}\, J_n(X,rn) \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left\{C_3\min(r,n)n^2\ln n\right\} X^{2ln-n(n+1)/2+(n^2/2)(1-1/n)^r},$$

и теорема 1 полностью доказана.

Для обычных приложений достаточным является такое

Следствие. *Пусть $n,r\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $l,X\in\mathbb{R}$, $l\geqslant rn$, $X\geqslant 1$. Тогда*

$$J_n(X,l) \leqslant n^{C_3n^3}X^{2l-n(n+1)/2+(n^2/2)(1-1/n)^r}. \quad (3.31)$$

Теперь мы покажем, что при фиксированных n, r и l, $l > n$, $l \geqslant rn$,

$$\frac{J_n(X,l)}{X^{2l-n(n+1)/2+(n^2/2)(1-1/n)^r}} \to 0 \qquad (X\to\infty). \quad (3.32)$$

Нам будет нужна следующая лемма, доказанная Хуа Ло-кеном [11] (лемма 4.5).

Лемма 7. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $X\in\mathbb{R}$, $X\geqslant e$, $L=\ln X$. Тогда*

$$J_n(X,n+1) \leqslant A(n)X^{n+1}L^{2^n-1}. \quad (3.33)$$

Полагая в неравенстве (3.33) $X=e$, находим, что

$$A(n) \geqslant e^{-C_{30}n}. \quad (3.34)$$

Теорема 2. *Пусть $n,r\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $X\in\mathbb{R}$, $X\geqslant e$, $L=\ln X$,*

$$l\in\mathbb{R},\quad l=rn+1+tn \qquad (0\leqslant t\leqslant 1).$$

Тогда

$$J_n(X,l) \leqslant D_3(r,n)X^{2l-n(n+1)/2+\eta(1-1/n)^{r-1}(1-t/n)}L^{2^n-1}, \quad (3.35)$$

где

$$\eta = \frac{1}{2}(n+1)(n-2), \quad (3.36)$$

$$D_3(r,n) = A(n)\,\exp\left\{C_{31}\min(r,n)n^2\ln n\right\} \quad (3.37)$$

и $A(n)$ имеет тот же смысл, что и в лемме 7.

Если будет установлено, что

$$A(n) \leqslant \exp\{C_{32}n^2 \ln n\},$$

то множитель $A(n)$ в (3.37) можно опустить.

Доказательство. Оно повторяет доказательство теоремы 1 и разбивается на четыре шага:

1) случай $l = rn + 1$ и малых r $(1 \leqslant r \leqslant n)$;

2) случай $l = rn + 1$ и больших r $(r \geqslant n)$;

3) отсекание слишком больших r;

4) переход к промежуточным l.

Случай малых r охватывается следующей леммой.

Лемма 8. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $1 \leqslant r \leqslant n$, $X \in \mathbb{R}$, $X \geqslant e$, $L = \ln X$. Тогда*

$$J_n(X, rn+1) \leqslant D_4(r,n) X^{2(rn+1)-n(n+1)/2+\eta(1-1/n)^{r-1}} L^{2^n-1}, \tag{3.38}$$

где

$$D_4(r,n) = A(n)\, \exp\{C_{33} r n^2 \ln n\}. \tag{3.39}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 6.

Остальные шаги доказательства теоремы 2 мало отличаются от соответствующих шагов доказательстве теоремы 1.

Случай $l = rn + 1$ и больших r $(r \geqslant n)$. Учитывая, что согласно (3.34) $A(n) \geqslant e^{-C_{30}n}$ и $L \geqslant 1$, получаем, что в этом случае при $X \geqslant e$

$$J_n(X, rn+1) \leqslant D_5(r,n)\, X^{2(rn+1)-n(n+1)/2+\eta(1-1/n)^{r-1}} L^{2^n-1}, \tag{3.40}$$

где

$$D_5(r,n) = A(n)\, \exp\left\{C_{34}\frac{n}{\ln n}(r^2 + n^2 \ln n)\right\}.$$

Далее, согласно теорема A, если $r \geqslant C_1 n \ln n$, то

$$J_n(X, rn+1) \leqslant \exp\{C_2 n^3 \ln n\}\, X^{2(rn+1)-n(n+1)/2} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\{C_2 n^3 \ln n\}\, X^{2(rn+1)-n(n+1)/2+\eta(1-1/n)^{r-1}} L^{2^n-1} \qquad (X \geqslant e).$$

Но

$$\exp\{C_2 n^3 \ln n\} \leqslant A(n)\, \exp\{C_{35} n^3 \ln n\} = D_6(r,n),$$

откуда при $r \geqslant C_1 n \ln n$

$$J_n(X, rn+1) \leqslant D_6(r,n)\, X^{2(rn+1)-n(n+1)/2+\eta(1-1/n)^{r-1}} L^{2^n-1} \qquad (X \geqslant e),$$

и доказательство заканчивается, как в теореме 1.

Из этой теоремы и из леммы 7 вытекает свойство (3.32). Рассмотрим два случая.

1) $n < l < n + 1$. По лемме 7 и свойству 2)

$$J_n(X, l) \leqslant \big(A(n)\big)^{l/(n+1)}\, X^l\, L^{(l/(n+1))(2^n-1)},$$

$$l < 2l - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2}{2}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) = 2l - n.$$

2) $l \geqslant n + 1$. В силу кусочной линейности исследуемых показателей достаточно доказать, что при $l = rn$ $(r \geqslant 2)$ показатель при X в теореме 2 меньше, чем

показатель при X в теореме 1, т.е.

$$\eta\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{r-2}\Big(1-\frac{t}{n}\Big) < \frac{n^2}{2}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{r},$$

где η определяется равенством (3.36) и $t=(n-1)/n$, что легко проверить.

§ 4. Оценки тригонометрических сумм

Пусть

$$T(Q)=\sum_{k=1}^{Q} e\big(F(k)\big), \tag{4.1}$$

где $Q\in\mathbb{N}$ и $F(u)$ $(1\leqslant u\leqslant Q)$ — действительная n раз дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$0<\lambda\leqslant F^{(n)}(u)\leqslant 2\lambda \qquad (1\leqslant u\leqslant Q). \tag{4.2}$$

Ван дер Корпут получил следующую оценку суммы $T(Q)$ [20, с. 841] (см. также [21, теорема 20, с. 114]):

$$|T(Q)|\leqslant C_{36}Q\big\{\lambda^{1/(2^n-2)}+Q^{-1/(2^{n-1})}+(\lambda Q^n)^{-1/(2^{n-1})}\big\}. \tag{4.3}$$

Здесь мы получим оценку $T(Q)$ через J_{n-1} и сравним результаты с (4.3).

Лемма 9. *Пусть $n,l,q,Q,R\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $1\leqslant R\leqslant q\leqslant Q$, $\lambda>0$, функция $F(u)$ $(1\leqslant u\leqslant Q)$ удовлетворяет условию*

$$\left|\frac{F^{(n)}(u)}{n!}\right|\leqslant\lambda \qquad (1\leqslant u\leqslant Q) \tag{4.4}$$

и $\Omega(m)$ есть область точек $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$, для которых

$$\left|\frac{F^{(\nu)}(m)}{\nu!}-\alpha_\nu\right|\leqslant\frac{1}{2}\lambda q^{n-\nu} \qquad (\nu=1,\dots,n-1). \tag{4.5}$$

Тогда, полагая

$$T_m(R)=\sum_{k=1}^{R} e\big(F(k+m)-F(m)\big) \qquad (1\leqslant R\leqslant q;\ 1\leqslant m\leqslant Q-R), \tag{4.6}$$

будем иметь для $\alpha\in\Omega(m)$

$$|T_m(R)|^{2l}\leqslant n^{C_{37}l}\left\{(q^n\lambda)^{2l}R^{-1}\sum_{k=1}^{R-1}|S_{n-1}(k,\alpha)|^{2l}+|S_{n-1}(R,\alpha)|^{2l}\right\} \quad (R=1,\dots,q). \tag{4.7}$$

Доказательство. Пусть $\alpha\in\Omega(m)$. Положим

$$u_k=u_k(m)=F(k+m)-F(m)-\sum_{\nu=1}^{n-1}\alpha_\nu k^\nu \qquad (m=1,\dots,Q-k;\ k=0,1,\dots,q). \tag{4.8}$$

По преобразованию Абеля

$$T_m(R)=\sum_{k=1}^{R}e\bigl(F(k+m)-F(m)\bigr)=\sum_{k=1}^{R}e\biggl(\sum_{\nu=1}^{n-1}\alpha_\nu k^\nu+u_k\biggr)=$$
$$=\sum_{k=1}^{R}\bigl(e(u_k)-e(u_{k+1})\bigr)\,S_{n-1}(k,\alpha)+e(u_R)\,S_{n-1}(R,\alpha),\qquad(4.9)$$

откуда

$$|T_m(R)|\leqslant\sum_{k=1}^{R-1}|e(u_k)-e(u_{k+1})|\,|S_{n-1}(k,\alpha)|+|S_{n-1}(R,\alpha)|.\qquad(4.10)$$

Оценим $|e(u_k)-e(u_{k+1})|$. По формуле Тейлора

$$F(k+m)-F(m)=\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{F^{(\nu)}(m)}{\nu!}k^\nu+\frac{1}{(n-1)!}\int_m^{k+m}(k+m-n)^{n-1}F^{(n)}(u)\,du,$$

откуда

$$u_{k+1}-u_k=F(k+m+1)-F(k+m)-\sum_{\nu=1}^{n-1}\alpha_\nu\bigl((k+1)^\nu-k^\nu\bigr)=$$
$$=\sum_{\nu=1}^{n-1}\biggl\{\frac{F^{(\nu)}(m)}{\nu!}-\alpha^\nu\biggr\}\bigl((k+1)^\nu-k^\nu\bigr)+$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_m^{k+m}\bigl((k+m+1-u)^{n-1}-(k+m-u)^{n-1}\bigr)F^{(n)}(u)\,du+$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_{k+m}^{k+m+1}(k+m+1-u)^{n-1}F^{(n)}(u)\,du.$$

Отсюда в силу (4.5) и (4.4)

$$|u_{k+1}-u_k|\leqslant\frac{1}{2}\lambda\sum_{\nu=1}^{n-1}q^{n-\nu}\nu(k+1)^{\nu-1}+nk(n-1)(k+1)^{n-2}\lambda+$$
$$+n\lambda\leqslant C_{38}n^2q^{n-1}\lambda\qquad(k=1,\dots,q-1)$$

и, следовательно,

$$|e(u_k)-e(u_{k+1})|=|1-e(u_{k+1}-u_k)|\leqslant2\pi|u_{k+1}-u_k|\leqslant$$
$$\leqslant C_{39}n^2q^{n-1}\lambda\qquad(k=1,\dots,q-1).\qquad(4.11)$$

Подставляя эту оценку в (4.10), получаем

$$|T_m(R)|\leqslant C_{39}n^2q^{n-1}\lambda\sum_{k=1}^{R-1}|S_{n-1}(k,\alpha)|+|S_{n-1}(R,\alpha)|,$$

откуда по неравенству Гёльдера

$$|T_m(R)|^{2l} \leqslant \left\{ (C_{39}n^2q^{n-1}\lambda)^{2l} \left(\sum_{k=1}^{R-1} |S_{n-1}(k,\alpha)| \right)^{2l} + |S_{n-1}(R,\alpha)| \right)^{2l} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2l} \left\{ (C_{39}n^2q^{n-1}\lambda)^{2l} R^{2l-1} \sum_{k=1}^{R-1} |S_{n-1}(k,\alpha)|^{2l} + |S_{n-1}(R,\alpha)|^{2l} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant (C_{40}n^2)^{2l} \left\{ (q^{n-1}\lambda)^{2l} R^{-1} \sum_{k=1}^{R-1} |S_{n-1}(k,\alpha)|^{2l} + |S_{n-1}(R,\alpha)|^{2l} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant n^{C_{37}l} \left\{ (q^n\lambda)^{2l} R^{-1} \sum_{k=1}^{R-1} |S_{n-1}(k,\alpha)|^{2l} + |S_{n-1}(R,\alpha)|^{2l} \right\} \qquad (R = 1, \ldots, q),$$

и лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть выполнены условия предыдущей леммы и, кроме того,*

$$0 < h \leqslant 1, \quad \lambda h \leqslant \frac{F^{(n)}(n)}{n!} \leqslant \lambda \qquad (0 \leqslant u \leqslant Q), \tag{4.12}$$
$$Q = Pq + R, \quad 0 \leqslant R < q, \quad P \in \mathbb{N}, \quad \lambda q \leqslant 1.$$

Будем рассматривать $\Omega(sq)$ $(s = 0, \ldots, P-1)$ как области в $\mathbb{T}^{n-1}$, и пусть G есть максимальная кратность покрытия точек $\alpha \in \mathbb{T}^{n-1}$ областями $\Omega(sq)$.

Тогда

$$G \leqslant C_{41}nh^{-1}(\lambda Q + 1). \tag{4.13}$$

Эта лемма известна (см. [4, с. 100]). Ради полноты приведем ее простое доказательство.

Доказательство. Если области $\Omega(sq)$ и $\Omega(s'q)$ из $\mathbb{T}^{n-1}$ не пересекаются, то в силу условия (4.5) для $\nu = n-1$ числа $F^{(n-1)}(sq)/(n-1)!$ и $F^{(n-1)}(s'q)/(n-1)$ принадлежат конгруэнтным mod 1 интервалам длины $\lambda q \leqslant 1$. Так как

$$\frac{1}{(n-1)!}\left\{F^{(n-1)}\big((s+1)q\big) - F^{(n-1)}(sq)\right\} = n\int_{sq}^{(s+1)q} \frac{F^{(n)}(u)}{n!}du,$$

то в силу (4.12)

$$nh\lambda q \leqslant \frac{1}{(n-1)!}\left\{F^{(n-1)}\big((s+1)q\big) - F^{(n-1)}(sq)\right\} \leqslant n\lambda q.$$

Поэтому общее изменение $F^{(n-1)}(sq)/(n-1)!$ за P шагов не превосходит $nPq\lambda \leqslant$ $\leqslant n\lambda Q$, и на каждый интервал $\Delta \subset \mathbb{R}$ длины λq попадает не более $(nh)^{-1} + 1$ точек. Отсюда

$$G \leqslant \Big(\frac{1}{nh} + 1\Big)(n\lambda Q + 2) \leqslant C_{42}h^{-1}(n\lambda Q + 2) \leqslant C_{41}nh^{-1}(\lambda Q + 1),$$

и лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть $n, l, Q \in \mathbb{N}$, $l \geqslant n - 1 \geqslant 2$, $\lambda, h \in \mathbb{R}$, $Q^{-n} \leqslant \lambda \leqslant 1$, $0 \leqslant h < 1$, и функция $F(u)$ $(1 \leqslant u \leqslant Q)$ удовлетворяет условиям (4.12). Тогда*

$$|T(Q)| \leqslant \exp\{C_{43}n\}\, Q\left\{h^{-1}(\lambda + Q^{-1})q^{1-2l+n(n-1)/2}J_{n-1}(q,l)\right\}^{1/2l}, \tag{4.14}$$

где

$$q = [\lambda^{-1/n}]. \tag{4.15}$$

Доказательство. Будем пользоваться обозначениями леммы 9. В силу выбора q имеем
$$q \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant q \leqslant \lambda^{-1/n}, \quad 2^{-n} \leqslant \lambda q^n \leqslant 1, \tag{4.16}$$
откуда для объема области $\Omega(m)$ получаем оценку
$$V = V_{n-1}\big(\Omega(m)\big) = (\lambda q^n)^{n-1} q^{-n(n-1)/2} \geqslant 2^{-n^2} q^{-n(n-1)/2}. \tag{4.17}$$
Пусть
$$Q = Pq + R, \tag{4.18}$$
где $P \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant R < q$.

Представим $T(Q)$ в форме
$$T(Q) = \sum_{s=0}^{P-1} \sum_{k=1}^{q} e\big(F(sq+k)\big) + \sum_{k=1}^{R} e\big(F(Pq+k)\big).$$
Тогда
$$|T(Q)| \leqslant \sum_{s=0}^{P-1} |T_{sq}(q)| + |T_{Pq}(R)|$$
и по неравенству Гёльдера
$$|T(Q)| \leqslant (P+1)^{1-1/2l} \left\{ \sum_{s=0}^{P-1} |T_{sq}(q)|^{2l} + |T_{Pq}(q)|^{2l} \right\}^{1/2l} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{1-1/2l} \left\{ \sum_{s=0}^{P-1} |T_{sq}(q)|^{2l} + |T_{Pq}(q)|^{2l} \right\}^{1/2l}. \tag{4.19}$$
Далее, если $\alpha \in \Omega(sq)$, то по лемме 9 и в силу (4.16)
$$|T_{sq}(q)|^{2l} \leqslant n^{C_{37}l} \left\{ (\lambda q^n)^{2l} q^{-1} \sum_{k=1}^{q-1} |S_{n-1}(k,\alpha)|^{2l} + |S_{n-1}(q,\alpha)|^{2l} \right\} \leqslant$$
$$\leqslant n^{C_{37}l} \left\{ q^{-1} \sum_{k=1}^{q-1} |S_{n-1}(k,\alpha)|^{2l} + |S_{n-1}(q,\alpha)|^{2l} \right\}.$$
Интегрируя это неравенство по области $\Omega(sq)$, получаем
$$|T_{sq}(q)|^{2l} \leqslant n^{C_{37}l}\, V^{-1} \left\{ q^{-1} \sum_{k=1}^{q-1} \int_{\Omega(sq)} |S_{n-1}(k,\alpha)|^{2l}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_{n-1} + \right.$$
$$\left. + \int_{\Omega(sq)} |S_{n-1}(q,\alpha)|^{2l}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_{n-1} \right\}.$$
Обозначая через G максимальную кратность покрытия точек $\alpha \in \mathbb{T}^{n-1}$ областями $\Omega(sq)$ $(s = 0, 1, \ldots, P-1)$ и используя свойство 6), выводим отсюда
$$\sum_{s=0}^{P-1} |T_{sq}(q)|^{2l} \leqslant n^{C_{37}l}\, V^{-1} \left\{ q^{-1} \sum_{k=1}^{q-1} \int_{\mathbb{T}^{n-1}} |S_{n-1}(k,\alpha)|^{2l}\, d\alpha + \int_{\mathbb{T}^{n-1}} |S_{n-1}(q,\alpha)|^{2l}\, d\alpha \right\} \leqslant$$
$$\leqslant n^{C_{44}l} G\, V^{-1} \int_{\mathbb{T}^{n-1}} |S_{n-1}(q,\alpha)|^{2l} d\alpha = n^{C_{44}l} G V^{-1} J_{n-1}(q,l).$$

Точно так же

$$|T_{Pq}(R)|^{2l} \leqslant n^{C_{44}l}\, V^{-1} J_{n-1}(q,l) \qquad (0 \leqslant R < q).$$

Поэтому, учитывая лемму 10 и (4.17),

$$\sum_{s=0}^{P-1} |T_{sq}(q)|^{2l} + |T_{Pq}(R)|^{2l} \leqslant n^{C_{45}l}\, GV^{-1} J_{n-1}(q,l) \leqslant$$

$$\leqslant n^{C_{46}l}\, 2^{n^2} (\lambda Q + 1) h^{-1} q^{n(n-1)/2} J_{n-1}(q,l). \quad (4.20)$$

Сопоставляя (4.19), (4.18) и (4.20), находим окончательно

$$|T(Q)| \leqslant 2^{P^{1-1/2l}} \left\{ \sum_{s=0}^{P-1} |T_{sq}(q)|^{2l} + |T_{Pq}(R)|^{2l} \right\}^{1/(2l)} \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\frac{Q}{q}\right)^{1-1/2l} \left\{ n^{C_{46}l} 2^{n^2} (\lambda Q + 1) h^{-1} q^{n(n-1)/2} J_{n-1}(q,l) \right\}^{1/(2l)} \leqslant$$

$$\leqslant n^{C_{47}l}\, 2^{n^2/2l} \left\{ h^{-1}(\lambda + Q^{-1}) q^{1-2l+n(n-1)/2} J_{n-1}(q,l) \right\}^{1/(2l)} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\{C_{43}n\}\, Q \left\{ h^{-1}(\lambda + Q^{-1}) q^{1-2l+n(n-1)/2} J_{n-1}(q,l) \right\}^{1/(2l)},$$

и теорема доказана.

Получим с помощью этой теоремы и теорем 1 и 2 несколько более удобных оценок суммы $T(Q)$.

Предложение 1. *Пусть $n, Q \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\lambda, h \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $0 < h \leqslant 1$, и функция $F(u)$ $(0 \leqslant u \leqslant Q)$ удовлетворяет условиями*

$$h\lambda \leqslant \frac{F^{(n)}(u)}{n!} \leqslant \lambda \qquad (1 \leqslant u \leqslant Q). \quad (4.12)$$

Тогда найдутся константы C_{48}, C_{49} и C_{50} такие, что

$$|T(Q)| \leqslant e^{C_{48}n}\, Q\, h^{-\tau_n} \left\{ (\lambda^{\rho_n} + (Q\lambda^{1/n})^{-\rho_n}) \right\}, \quad (4.21)$$

где

$$\rho_n = \frac{C_{49}}{n^2 \ln n}, \qquad \tau_n = \frac{C_{50}}{n^2 \ln n}. \quad (4.22)$$

Доказательство. Без ограничения общности $Q^{-n} \leqslant \lambda \leqslant 1$, так как в противном случае оценка (4.21) тривиальна. Воспользуемся теоремой A. Она показывает[1], что найдется

$$l_n \in \mathbb{N}, \quad C_{51} n^2 \ln n \leqslant l_n \leqslant C_{52} n^2 \ln n$$

такое, что

$$J_{n-1}(q, l_n) \leqslant n^{C_1 n^3} q^{2l_n - n(n-1)/2}.$$

При таком выборе $l = l_n$ предыдущая теорема дает

$$|T(Q)| \leqslant e^{C_{43}n} Q \left\{ h^{-1}(\lambda + Q^{-1}) n^{C_1 n^3} q \right\} q^{1/(2l_n)} \leqslant$$

$$\leqslant e^{C_{48}n} Q \left\{ h^{-1}(\lambda + Q^{-1}) \lambda^{-1/n} \right\}^{1/(2l_n)} \leqslant$$

$$\leqslant e^{C_{48}n} Q h^{-1/(2l_n)} \left\{ \lambda^{-(n-1)/(n\cdot 2l_n)} + (Q\lambda^{1/n})^{-1/(2l_n)} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant e^{C_{48}n} Q h^{-\tau_n} \left\{ \lambda^{\rho_n} + (Q\lambda^{1/n})^{\rho_n} \right\},$$

[1] Строго говоря, из теоремы A это свойство вытекает только при $n \geqslant 3$. Но случай $n = 2$ тривиален, так как тогда $J_1(q,1) = q$.

и предложение 1 установлено.

В оценке (4.21) при больших λ главным является первый член, а при малых λ (в частности, при $Q^{-n} \leqslant \lambda \leqslant Q^{-1}$) — второй. В формулировке предложения 1 условие (4.12) можно заменить на

$$h\lambda \leqslant F^{(n)}(u) \leqslant \lambda, \tag{4.23}$$

так как это влияет лишь на значение константы C_{48}.

Поскольку в теореме А не дается асимптотика l_n, мы не можем из нее вывести асимптотическую оценку ρ_n. Если вместо теоремы А воспользоваться упрощенной верхней границей для J, данной И.М. Виноградовым ([1, гл. 4, теорема 4]), то получим

$$|T(Q)| \leqslant A(n)\, h^{-\rho_n} \left\{\lambda^{\left((n-1)/n\right)\rho_n} + (Q\lambda^{1/n})^{-\rho_n}\right\} \qquad (n \geqslant 12), \tag{4.24}$$

где

$$\rho_n = \left\{2\left[n^2(2\ln n + \ln\ln n + 2{,}6)\right]\right\}^{-1} \approx \frac{1}{4n^2 \ln n}, \tag{4.25}$$

но без оценки константы $A(n)$.

Отметим, что для оценки $T(Q)$ необходимо пользоваться упрощенной верхней оценкой для J лишь в том случае, если λ очень мало, например имеет порядок $Q^{-n}\ln Q$. Если же $\lambda \geqslant Q^{1/n-n}$, то можно использовать теоремы 1 или 2, и притом для таких значений параметра l, когда они устанавливаются без помощи теоремы А.

Предложение 2. *Пусть выполнены все условия предложения* 1 *и, кроме того,*

$$Q^{\alpha-n} \leqslant \lambda \leqslant Q^{-1}, \tag{4.26}$$

где $1/n \leqslant \alpha \leqslant n-1$. *Тогда*

$$|T(Q)| \leqslant e^{C_{53}n}\, h^{-C_{54}/(n^2\ln n)}\, Q^{1-(C_{55}\alpha)/(n^3\ln n)}. \tag{4.27}$$

Воспользуемся теоремой 1, положив в ней

$$r = [4n\,\ln n + 1].$$

Тогда

$$\frac{(n-1)^2}{2}\Bigl(1-\frac{1}{n-1}\Bigr)^r \leqslant \frac{(n-1)^2}{2}e^{-4\ln n} \leqslant \frac{1}{2n^2} \leqslant \frac{\alpha}{2n},$$
$$J_{n-1}(X, rn) \leqslant e^{C_3 n^3 \ln n}\, X^{2rn-n(n-1)/2+\alpha/(2n)} \qquad (X \geqslant 1).$$

Но в силу выбора r

$$C_{56}n^2\ln n \leqslant rn < C_{57}n^2 \ln n.$$

Отсюда по теореме 3

$$|T(Q)| \leqslant e^{C_{33}n}Q\bigl(h^{-1}Q^{-1}\lambda^{-1/n+\alpha/(2n^2)}\bigr)^{1/(2rn)} \leqslant e^{C_{53}n}Q\bigl(h^{-1}Q^{-\alpha/(2n)}\bigr)^{1/(2rn)},$$

откуда и вытекает (4.27).

Если $\lambda \leqslant Q^{-1}$ и не слишком мало, то аналогичные оценки можно получить и для $T(N)$ $(N \leqslant Q)$ (ср. [4, теорема 5, с. 105]).

Предложение 3. *Пусть выполнены все условия предложения* 1 *и, кроме того,*

$$N \in \mathbb{N}, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad N \leqslant Q, \quad \gamma > 1, \quad n > 4\gamma, \quad Q^{-\gamma} \leqslant \lambda \leqslant Q^{-1}. \tag{4.28}$$

Тогда

$$|T(N)| \leqslant e^{C_{58}n}\, Q\, (hQ^{1/2})^{-\rho_n}, \tag{4.29}$$

где

$$\rho_n = \frac{C_{59}}{n^2 \ln n}.$$

Пусть сперва

$$N = Q, \quad n \geqslant 2\gamma. \tag{4.30}$$

Так как случай $hQ^{1/2} \leqslant 1$ тривиален, то без ограничения общности $hQ^{1/2} \geqslant 1$. В виду условий (4.28) и (4.30)

$$\gamma \leqslant \frac{n}{2}, \quad \alpha = n - \gamma \geqslant \frac{n}{2}.$$

Отсюда, как при доказательстве предложения 2,

$$|T(Q)| \leqslant e^{C_{58}n} Q(h^{-1}Q^{-1}\lambda^{-1/n})^{1/(2rn)} \leqslant e^{C_{58}n} Q(hQ^{1/2})^{-1/(2rn)} \leqslant$$
$$\leqslant e^{C_{58}n} Q(hQ^{1/2})^{-\rho_n}. \tag{4.31}$$

Константу C_{59} в определении ρ_n можно считать достаточно малой, в частности такой, что $\rho_n \leqslant 1$.

Переходим к исследованию случая $N \leqslant Q$, $n \geqslant 4\gamma$. Если $N \leqslant Q^{1/2}$, то так как $\rho_n \leqslant 1$, имеем

$$e^{C_{58}n} Q(hQ^{1/2})^{-\rho_n} \geqslant Q^{1/2} \geqslant N,$$

и, следовательно, оценка (4.29) тривиальна. Если же $N \geqslant Q^{1/2}$, то

$$N^{-2\gamma} \leqslant \lambda \leqslant Q^{-1} \leqslant N^{-1}, \qquad n \geqslant 2(2\gamma),$$

и применима оценка (4.31) с заменой Q на N. Отсюда

$$|T(N)| \leqslant e^{C_{58}n} N(hN^{1/2})^{-\rho_n} \leqslant e^{C_{58}n} Q(hQ^{1/2})^{-\rho_n},$$

и предложение 3 установлено.

В случае больших λ $(Q^{-1} \leqslant \lambda \leqslant 1)$ можно получить асимптотическую оценку ρ_n.

Предложение 4. *Пусть выполнены все условия предложения* 1 *и, кроме того,*

$$n \geqslant 3, \quad Q^{-1} \leqslant \lambda \leqslant 1. \tag{4.32}$$

Тогда

$$|T(Q)| \leqslant e^{C_{60}n} h^{-\tau_n} Q \lambda^{\rho_n}, \tag{4.33}$$

где

$$\begin{gathered}\tau_n = \left\{2(n-1)[(n-1)(\ln n + \ln\ln n - \ln 2) + 1]\right\}^{-1},\\ \rho_n = \frac{1}{2n^2 \ln n}\left(1 - \frac{\ln\ln n + 1 - \ln 2}{\ln n}\right).\end{gathered} \tag{4.34}$$

Доказательство. Теорема 3 показывает, что при $\lambda \geqslant Q^{-1}$

$$|T(Q)| \leqslant e^{C_{43}n} Q\big(h^{-1}\,\lambda\, q^{1-2l+n(n-1)/2}\, J_{n-1}(q,l)\big)^{1/(2l)},$$

где $q = [\lambda^{-1/n}]$. Для оценки J_{n-1} воспользуемся теоремой 1, согласно которой, если $l \geqslant r(n-1)$, то

$$J_{n-1}(q,l) \leqslant e^{C_3 n^3} q^{2l-n(n-1)/2+\eta}, \tag{4.35}$$

где
$$\eta=\frac{(n-1)^2}{2}\Big(1-\frac{1}{n-1}\Big)^r.$$
Отсюда
$$|T(Q)|\leqslant e^{C_{43}n}Q\big(h^{-1}\lambda n^{C_3n^3}q^{1+\eta}\big)^{1/2l}\leqslant$$
$$\leqslant\exp\Big\{C_{43}n+C_3\frac{n^3\ln n}{2l}\Big\}h^{-1/2l}Q\lambda^{(n-1-\eta)/(2ln)}. \qquad (4.36)$$
Положим здесь
$$r=\big[(n-1)(\ln n+\ln\ln n-\ln 2)+1\big],\qquad l=r(n-1). \qquad (4.37)$$
Тогда $r\in\mathbb{N}$,
$$(n-1)(\ln n+\ln\ln n-\ln 2)\leqslant r\leqslant(n-1)(\ln n+\ln\ln n-\ln 2)+1,$$
$$\Big(1-\frac{1}{n-1}\Big)^r\leqslant\Big(1-\frac{1}{n-1}\Big)^{(n-1)(\ln n+\ln\ln n-\ln 2)}\leqslant\frac{2}{n\ln n},$$
$$\eta=\frac{(n-1)^2}{2}\Big(1-\frac{1}{n-1}\Big)^r\leqslant\frac{(n-1)^2}{n\ln n},$$
$$\frac{n-1-\eta}{2ln}\geqslant\frac{n-1-(n-1)^2/(n\ln n)}{2n(n-1)n(\ln n+\ln\ln n-\ln 2+1/n)}=$$
$$=\frac{1}{2n^2\ln n}\,\frac{1-(n-1)/(n\ln n)}{1+(\ln\ln n-\ln 2+1/n)/\ln n}>$$
$$>\frac{1}{2n^2\ln n}\Big(1-\frac{n-1}{n\ln n}\Big)\Big(1-\frac{\ln\ln n-\ln 2+1/n}{\ln n}\Big)>$$
$$>\frac{1}{2n^2\ln n}\Big(1-\frac{n-1}{n\ln n}-\frac{\ln\ln n-\ln 2+1/n}{\ln n}\Big)=\frac{1}{2n^2\ln n}\Big(1-\frac{\ln\ln n+1-\ln 2}{\ln n}\Big)=\rho_n,$$
откуда, поскольку $l\geqslant C_{61}n^2\ln n$,
$$|T(Q)|\leqslant e^{C_{60}n}\,h^{-1/(2l)}\,\lambda^{\rho_n},$$
и предложение доказано.

При $n\geqslant 10$ это предложение дает для $T(Q)$ лучшие оценки, чем вытекающие из (4.3).

Отметим, что
$$\rho_n=\frac{1}{2n^2\ln n}\Big(1+O\Big(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\Big)\Big) \qquad (4.38)$$
и что константа $1/2$ в главном члене формулы лучше известных.

Для малых n этот результат можно еще несколько уточнить.

Предложение 5. *Пусть выполнены все условия предложения* 1 *и, кроме того,* $n\geqslant 3$, $r\in\mathbb{N}$, $l=r(n-1)+1$.

Тогда для любого $\varepsilon>0$
$$|T(Q)|\leqslant A(n,\varepsilon)\,h^{-1/(2l)}\,Q\,\lambda^{\rho_n-\varepsilon}\qquad(Q^{-1}\leqslant\lambda\leqslant 1), \qquad (4.39)$$
$$|T(Q)|\leqslant A(n,\varepsilon)\,h^{-1/(2l)}\,Q^{1-1/(2l)}\,\lambda^{-\tau_n-\varepsilon}\qquad(\lambda\leqslant Q^{-1}), \qquad (4.40)$$

где

$$\rho_n = \frac{n-1-n(n-3)\big(1-1/(n-1)\big)^{r-1}/2}{2nl},$$
$$\tau_n = \frac{1+n(n-3)\big(1-1/(n-1)\big)^{r-1}/2}{2nl}. \qquad (4.41)$$

Пользуемся теоремами 2 и 3.

В заключение сделаем несколько замечаний относительно результатов К.А. Родосского [14].

Ясно, что теорема 3 настоящей работы является обобщением и уточнением основной теоремы из [14]. Теорема 3 справедлива для более широкого класса функций $F(u)$, в правой части (4.14) отсутствует множитель $(\ln q)^{n/(2l)}$ и слагаемое $Q\,\lambda^{1/(2n)}$ и дается оценка роста константы.

Предложение 5 уточняет теорему A из [14]. Подсчеты показывают, что если $n=9$, то максимум в формуле для ρ_n достигается при $r=20$ и

$$\rho_9^* = \max_r \rho_9 > \frac{1}{495}, \qquad (4.42)$$

т.е. для $n=9$ предложение 5 дает в области $Q^{-1} \leqslant \lambda \leqslant 1$ более сильные оценки, чем (4.3). Аналогично получается некоторое усиление теоремы A (случаи $n=10$ и $n=11$).

Наконец, последняя теорема B из [14] имеет условный характер. Она получена в предположении справедливости следующей гипотезы.

Гипотеза H_n. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $X \geqslant 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$*

$$J_n\left(X,\, \frac{1}{2}n(n+1)\right) \leqslant A(n,\varepsilon)\, X^{n(n+1)/2+\varepsilon}.$$

К.А. Родосский отмечает, что если справедлива гипотеза H_{n-1}, то для тригонометрической суммы $T(Q)$, где $F(u)$ удовлетворяет условиям (4.12) и некоторым дополнительным ограничениям, выполняется следующая оценка:

$$|T(Q)| \leqslant A(n,\varepsilon)\, h^{-1/(n(n-1))}\, Q\,\{\lambda^{1/n^2-\varepsilon} + Q^{-1/(n(n-1)\lambda)}\,\lambda^{-1/(n^2(n-1))-\varepsilon}\} \quad (\varepsilon > 0).$$

Предполагая, что справедлива гипотеза H_{n-1} и полагая в теореме 3 $l = n(n-1)/2$, убеждаемся, что тогда эта оценка будет справедлива для любой функции $F(u)$, удовлетворяющей условиям (4.12), т.е. все дополнительные ограничения на $F(u)$ излишни.

Таким образом, в настоящей работе содержатся, и притом в усиленной форме, все результаты из [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виноградов И.М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — М.: Наука, 1971.
2. *Карацуба А.А.* Среднее значение модуля тригонометрической суммы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37, № 6. С. 1203–1227.
3. *Карацуба А.А.* Об одной системе неопределенных уравнений // Матем. заметки. 1968. Т. 4, вып. 2. С. 125–128.
4. *Chandrasekharan K.* Arithmetical functions // Grundlehren B. 167. — Berlin, Heidelberg, N.Y.: Springer-Verlag, 1970.
5. *Виноградов И.М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Труды МИАН СССР. 1947. Т. 23.

6. *Виноградов И.М.* Избранные труды. — М.: Изд-во АН СССР, 1952.
7. *Weyl H.* Zur Abschätzung von $\zeta(1+ti)$ // Math Z. 1921. V. 10. P. 88–101.
8. *Weyl H.* Zur Abschätzung von $\zeta(1+ti)$ // Gesammelte Abhandlungen. — Berlin, Heidelberg, N.Y.: Springer Verlag, 1968. — P. 181–194.
9. *Титчмарш Е.* Теория дзета-функции Римана. — М.: ИЛ, 1953.
10. *Прахар К.* Распределение простых чисел. — М.: Мир, 1967.
11. *Хуа Ло-кен.* Аддитивная теория простых чисел // Труды МИАН СССР. 1947. Т. 22.
12. *Хуа Ло-кен.* Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. — М.: Мир, 1964.
13. *Hua L.K.* Additive Primzahltheorie. — Leipzig, 1959.
14. *Родосский К.А.* О некоторых сторонах метода И.М. Виноградова // Изв. вузов. Сер. матем. 1965. № 1 (44). С. 123–132.
15. *Карацуба А.А.* О системах сравнений // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29, № 4. С. 935–944.
16. *Карацуба А.А.* Теоремы о среднем и полные тригонометрические суммы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1966. Т. 30, № 1. С. 183–206.
17. *Dickson L.E.* History of the theory of numbers. V. II. Diophantine analysis. — N.Y., 1966.
18. *Линник Ю.В.* О суммах Вейля // Докл. АН СССР. 1942. Т. 34, № 7. С. 201–203.
19. *Rosser I.B., Schoenfeld L.* Approximate formulas for some functions of prime numbers // Illinois J. Math. 1962. V. 6, № 1. P. 64–94.
20. *Van der Corput J.V.* Sur la méthode de Weyl dans la théorie des nombres // Proc. Koninkl. akad. Wet. 1937. V. 40, № 10. P. 836–845.
21. *Koksma J.F.* Diophantische Approximationed // Ergbnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Bd. 4. — Berlin: Springer Verlag, 1936.