ОЦЕНКА СУММ ГАУССА*)

1. Введение. В этой работе, как обычно, $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — множество целых рациональных чисел, $\mathbb{P}$ — множество простых чисел; $C_1,\ C_2, \ldots$ — абсолютные положительные константы, $e(x) = e^{2\pi i x}$. На протяжении всей работы

$$n \in \mathbb{N}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad a \in \mathbb{Z}, \quad p \in \mathbb{P}.$$

Суммами Гаусса называются тригонометрические суммы вида

$$S_n(a,q) = \sum_{k=0}^{q-1} \left(\frac{a}{q}\, k^n\right) \qquad (n \geqslant 2). \tag{1}$$

Основные свойства сумм Гаусса установлены Харди и Литтлвудом в работах, посвященных проблеме Варинга [1–5] (см. также [6]); они излагаются в монографиях Э. Ландау [7, ч. 6], И.М. Виноградова [8, гл. 2] и Р. Аюба [9, гл. 4]. Если $(a,q) = h > 1$, то

$$S_n(a,q) = h\, S_n\left(\frac{a}{h},\ \frac{q}{h}\right);$$

поэтому достаточно исследовать поведение сумм (1) при $(a,q) = 1$. Наиболее важной является здесь задача оценки $S_n(a,q)$ как функции от параметров q, n и a. Харди и Литтлвуд [5, с. 11, 12] доказали следующее предложение.

Пусть $(a,q) = 1$. *Тогда*

$$|S_n(a,q)| \leqslant A_n\, q^{1-1/n} \qquad (n \geqslant 2). \tag{2}$$

Так как, кроме того, при $p \in \mathbb{P}$, $(n,p) = 1$, $(a,p) = 1$,

$$S_n(a,p^n) = p^{n-1} = \left(p^n\right)^{1-1/n} \tag{3}$$

[3, с. 19], то оценка (2) достижима по q; точнее, для любого $n \geqslant 2$

$$1 \leqslant \overline{\lim_{q\to\infty}} \sup_{a:\,(a,q)=1} \frac{|S_n(a,q)|}{q^{1-1/n}} \leqslant A_n.$$

Настоящая работа посвящена исследованию зависимости оценки (2) от n. Именно, изучается поведение наименьшей константы A_n, для которой выполняется неравенство (2) для всех a и q таких, что $(a,q) = 1$. Обозначим ее через A_n^*, т.е. положим

$$A_n^* = \sup_{a,q:\,(a,q)=1} \frac{|S_n(a,q)|}{q^{1-1/n}} \qquad (n \geqslant 2). \tag{4}$$

Из (3) следует, что $A_n^* \geqslant 1$ $(n \geqslant 2)$, а в [8, с. 38] (см. также [9, с. 261, 262]) показано, что $A_n^* \leqslant n^{n^6}$. Здесь устанавливается следующая оценка A_n^* сверху, зависящая от арифметических свойств числа n:

$$A_n^* \leqslant \exp\left\{C_1 \left(\frac{n}{\varphi(n)}\right)^2\right\} \qquad (n \geqslant 3), \tag{5}$$

где $\varphi(n)$ — функция Эйлера. Отсюда вытекает, что

$$A_n^* \leqslant \exp\left\{C_2 (\ln\ln n)^2\right\} \qquad (n \geqslant 3) \tag{6}$$

*) Матем. заметки. 1975. Т. 17, вып. 4. С. 579–588.

и, например,

$$\sup_{P\in\mathbb{P},m\in\mathbb{N}} A^*_{P^m} = C_3 < \infty. \tag{7}$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$

$$\exp\left\{C_2(\ln\ln n)^2\right\} = O(n^\varepsilon),$$

то последовательность $\{A_n^*\}$ имеет очень медленно растущую мажоранту или ограничена.

2. Свойства сумм Гаусса. Перечислим основные свойства сумм Гаусса в предположении, что

$$n \geqslant 3, \qquad (a, q) = 1. \tag{8}$$

Свойство 1) доказано в [3, с. 18], свойство 2) — в [5, с. 12], и свойство 3) — в [4, с. 174]. Приемы доказательств свойств 1)–4) восходят к Гауссу [10], который исследовал случай $n = 2$.

1) (мультипликативность). *Если* $q = q_1q_2$, $(q_1, q_2) = 1$, *то*

$$S_n(a, q) = S_n(a_1, q_1)\, S_n(a_2, q_2), \qquad (a_1, q_1) = (a_2, q_2) = 1.$$

2) *Если* $m \in \mathbb{N}$, $m > n$, *то*

$$S_n(a, p^m) = p^{n-1} S_n(a, p^{m-n}).$$

3) *Если* $m \in \mathbb{N}$, $(n, p) = 1$ *и* $2 \leqslant m \leqslant n$, *то*

$$S_n(a, p^m) = p^{m-1}.$$

4) *Если* $l, m \in \mathbb{N}$, $p^l \| n$ [1)] *и* $l + 3 \leqslant m \leqslant n$, *то*

$$S_n(a, p^m) = p^{m-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$k = u + p^{m-l-1}v; \qquad u = 0, \dots, p^{m-l-1} - 1, \qquad v = 0, \dots, p^{l+1} - 1.$$

Харди и Литтлвуд [4, с. 166, лемма 1] доказали, что при сделанных предположениях

$$k^n \equiv u^n + nu^{n-1}p^{m-l-1}v \,(\mathrm{mod}\ p^m).$$

Поэтому

$$S_n(a, p^m) = \sum_{k=0}^{p^m-1} e\left(\frac{a}{p^m}\,k^n\right) = \sum_{n=0}^{p^{m-l-1}-1} \sum_{v=0}^{p^{l+1}-1} e\left(\frac{a}{p^m}\,(u^n + nu^{n-1}p^{m-l-1}v)\right) =$$

$$= \sum_{u=0}^{p^{m-l-1}-1} e\left(\frac{a}{p^m}\,u^n\right) \sum_{v=0}^{p^{l+1}-1} e\left(\frac{b}{p}\,u^{n-1}v\right),$$

где $(b, p) = 1$. Но если $(u, p) = 1$, то внутренняя сумма равна нулю, а если $u = pt$, $t = 0, \dots, p^{m-l-2} - 1$, то

$$\sum_{v=0}^{p^{l+1}-1} e\left(\frac{b}{p}(pt)^{n-1}v\right) = p^{l+1},$$

1) Запись $p^l \| n$ означает, что l — наибольшая степень p, делящая n.

откуда

$$S_n(a,p^m) = p^{l+1} \sum_{t=0}^{p^{m-l-2}-1} e(a\,p^{n-m}\,t^n) = p^{m-1}.$$

Возможно, что в такой форме это свойство ранее не отмечалось. Аналогично устанавливается, что если $p>2$, то свойство 4) справедливо при $l+2 \leqslant m \leqslant n$, но для дальнейшего это несущественно.

5) *Если* $(n,p-1)=d$, *то*

$$|S_n(a,p)| \leqslant (d-1)p^{1/2}. \tag{9}$$

Это — важнейшее свойство сумм Гаусса.

Для случая $n|(p-1)$ оценка (9) опубликована без доказательства в [1, с. 293], а в общем виде доказана в [5, с. 175]; стандартное доказательство см. в [8, гл. 2, лемма 3].

Оценка (9) становится тривиальной при $d \geqslant \sqrt{p}+1$. Для улучшения оценки A_n^* было бы важно получить нетривиальные оценки $S_n(a,p)$ в области $p^{1/2} < d \leqslant$ $\leqslant p^{1/2}L(p)$, где

$$L(p) \to \infty \quad (p \to \infty), \qquad L(p) \leqslant p^{\delta} \quad (0<\delta \leqslant \delta_0 < 1/2). \tag{9*}$$

3. Вспомогательная оценка. Здесь оценивается одна сумма, зависящая от простых чисел, которая появляется при оценке A_n.

Лемма 1.

$$\sum_{d|n} \frac{d^2}{\varphi(d)} \leqslant \frac{n^3}{\varphi^2(n)} \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{10}$$

Доказательство. Если $d \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{P}$, то

$$\frac{d}{\varphi(d)} = \prod_{p|d} \frac{1}{1-p^{-1}} \leqslant \prod_{p|Pd} \frac{1}{1-p^{-1}} = \frac{Pd}{\varphi(Pd)},$$

откуда

$$\frac{d}{\varphi(d)} \leqslant \frac{n}{\varphi(n)} \qquad (d|n).$$

Далее, пусть $\sigma(n)$ есть сумма делителей n. Полагая $n=\prod p^m$, находим (ср. [11, теорема 329])

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \prod_{p|n} \frac{1-p^{-m-1}}{1-p^{-1}} \leqslant \prod_{p|n} \frac{1}{1-p^{-1}} = \frac{n}{\varphi(n)}.$$

Используя эти оценки, получаем

$$\sum_{d|n} \frac{d^2}{\varphi(d)} \leqslant \frac{n}{\varphi(n)} \sum_{d|n} d = \frac{n}{\varphi(n)}\sigma(n) \leqslant \frac{n^3}{\varphi^2(n)},$$

и лемма доказана.

Замечание. Оценка (10) является точной в смысле порядка, т.е.

$$\sum_{d|n} \frac{d^2}{\varphi(d)} \geqslant C_4 \frac{n^3}{\varphi^2(n)}. \tag{11}$$

В самом деле, полагая

$$n=\prod_{p|n}p^m,\qquad d|n,\qquad d|\prod_{p|d}p^l,\qquad D=\prod_{p|n}p^{m-1},$$

находим

$$\sum_{d|n}\frac{d^2}{\varphi(d)}=\sum_{d|n}\prod_{p|d}\frac{p^l}{1-p^{-1}}\geqslant\sum_{d|n,\,D|d}\prod_{p|d}\frac{p^l}{1-p^{-1}}\geqslant$$

$$\geqslant\prod_{p|n}p^m\left(\frac{1}{1-p^{-1}}+p^{-1}\right)=n\prod_{p|n}(1-2p^{-2}+p^{-3})\prod_{p|n}(1-p^{-1})^{-2}>$$

$$>C_4\,n\left(\prod_{p|n}(1-p^{-1})^{-1}\right)^2=C_4\,\frac{n^3}{\varphi^2(n)},$$

где

$$C_4=\prod_{p}(1-2p^{-2}+p^{-3}).$$

Лемма 2. *Пусть $n\geqslant 3$. Тогда*

$$Q_n=\sum_{d|n}\sum_{\substack{p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ d)\\ p\leqslant d^{2n/(n-2)}}}\ln p\leqslant C_5\,\frac{n^3}{\varphi^2(n)}.\tag{12}$$

Доказательство. Имеем

$$Q_n\leqslant Q_n'+Q_n'',\tag{13}$$

где

$$Q_n'=\sum_{d|n}\sum_{\substack{m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ d)\\ d^2<m\leqslant d^{2n/(n-2)}}}\ln m,\qquad Q_n''=\sum_{d|n}\sum_{\substack{p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ d)\\ p\leqslant d^2}}\ln p.$$

Так как

$$2<\frac{2n}{n-2}\leqslant 2+\frac{C_6}{n},$$

то при $1\leqslant d\leqslant n$

$$d^2<d^{2n/(n-2)}\leqslant d^{C_6/n}\,d^2\leqslant\left(1+C_7\frac{\ln n}{n}\right)d^2,$$

$$d^{2n/(n-2)}-d^2\leqslant C_7\,\frac{\ln n}{n}\,d^2.$$

Отсюда следует, что число чисел $m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ d)$, для которых $d^2<m\leqslant d^{2n/(n-2)}$, не превосходит

$$C_7\,\frac{\ln n}{n}\,d+1\leqslant C_8\ln n\qquad(d\leqslant n).$$

Поэтому

$$\sum_{\substack{m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ d)\\ d^2<m\leqslant d^{2n/(n-2)}}}\ln m\leqslant\frac{2n}{n-2}\,\ln d\cdot C_8\,\ln n\leqslant C_9\ln^2 n\qquad(d\leqslant n),$$

и так как
$$d(n)=\sum_{l|n}1=O_\varepsilon(n^\varepsilon)\qquad(\varepsilon>0),$$
то
$$Q_n'\leqslant C_9\sum_{d|n}\ln^2 n\leqslant C_9\,d(n)\,\ln^2 n=O(n^\varepsilon)\qquad(\varepsilon>0).\tag{14}$$

Для оценки Q_n'' положим
$$\pi_d(x)=\sum_{\substack{p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ d)\\ p\leqslant x}}1\qquad(d\geqslant 2).$$
Как хорошо известно (см. [12, с. 53, теорема 4.1]),
$$\pi_d(x)\leqslant\frac{C_{10}\,x}{\varphi(d)\ln(x/d)}\qquad(x>d).$$
Отсюда
$$\sum_{\substack{p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ d)\\ p\leqslant d^2}}\ln p\leqslant 2\ln d\cdot\pi_d(d^2)\leqslant C_{11}\,\frac{d^2}{\varphi(d)}\qquad(d\geqslant 2)$$
и в силу леммы 1
$$Q_n''=\sum_{d|n}\sum_{\substack{p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ d)\\ p\leqslant d^2}}\ln p\leqslant C_{11}\sum_{d|n}\frac{d^2}{\varphi(d)}\leqslant C_{11}\,\frac{n^3}{\varphi^2(n)}.\tag{15}$$

Сопоставляя оценки (13)–(15) и учитывая, что $n^3/\varphi^2(n)\geqslant n$, получаем
$$Q_n\leqslant C_{11}\frac{n^3}{\varphi^2(n)}+O(n^\varepsilon)\leqslant C_5\,\frac{n^3}{\varphi^2(n)},$$
и лемма доказана.

4. Основные результаты.

Теорема. *Пусть $n\geqslant 3$, $(a,q)=1$. Тогда*
$$|S_n(a,q)|\leqslant A_n\,q^{1-1/n},\tag{16}$$
где
$$A_n=\exp\left\{C_1\Big(\frac{n}{\varphi(n)}\Big)^2\right\}.\tag{17}$$

Доказательство. Пусть
$$q=\prod_{j=1}^r p_j^{nl_j+s_j};\qquad l_j\in\mathbb{Z},\qquad l_j\geqslant 0,\qquad 1\leqslant s_j\leqslant n\qquad(j=1,\dots,r).$$
Согласно свойствам 1) и 2) сумм Гаусса имеем
$$\big|S_n(a,q)\big|=\prod_{j=1}^r\big|S_n(a_j,p_j^{nl_j+s_j})\big|=\prod_{j=1}^r\big|S_n(a_j,p_j^{s_j})p_j^{(n-1)l_j}\big|=\pi_1\pi_2\pi_3\bigg(\prod_{j=1}^r p_j^{nl_j}\bigg)^{1-1/n},$$
где
$$\pi_1=\prod_{p_j|n}\big|S_n(a_j,p_j^{s_j})\big|,\qquad\pi_2=\prod_{\substack{(p_j,n)=1\\ 2\leqslant s_j\leqslant n}}\big|S_n(a_j,p_j^{s_j})\big|,\qquad\pi_3=\prod_{\substack{(p_j,n)=1\\ s_j=1}}\big|S_n(a_j,p_j)\big|.$$

Для оценки π_1 положим

$$\gamma_n = (\ln 2)^{-1} \ln n + 3.$$

Тогда

$$\pi_1 = \prod_{\substack{p_j \mid n \\ s_j < \gamma_n}} \left|S_n(a_j, p_j^{s_j})\right| \prod_{\substack{p_j \mid n \\ s_j \geqslant \gamma_n}} \left|S_n(a_j, p_j^{s_j})\right| = \pi_1' \pi_2'.$$

π_1' оценим тривиально:

$$\pi_1' \left(\prod_{\substack{p_j \mid n \\ s_j < \gamma_n}} p_j^{s_j} \right)^{1/n-1} \leqslant \prod_{\substack{p_j \mid n \\ s_j < \gamma_n}} p_j^{s_j/n} \leqslant \left(\prod_{\substack{p_j \mid n \\ s_j < \gamma_n}} p_j \right)^{\gamma_n/n} \leqslant n^{\gamma_n/n} \leqslant C_{12},$$

так как согласно выбору γ_n

$$n^{\gamma_n/n} \leqslant \exp\left\{ C_{13} \, \frac{\ln^2 n}{n} \right\} \leqslant C_{12}.$$

Далее, пусть $p_j^{\alpha_j} \| n$. Так как $p_j^{\alpha_j} \leqslant n$, то

$$\alpha_j \leqslant \frac{\ln n}{\ln p_j} \leqslant \frac{\ln n}{\ln 2}, \qquad \gamma_n \geqslant \alpha_j + 3.$$

Таким образом, к сомножителям, входящим в π_1'', применимо свойство 4) сумм Гаусса, которое дает

$$\pi_1'' = \prod_{\substack{p_j \mid n \\ s_j \geqslant \gamma_n}} \left|S_n(a_j, p_j^{s_j})\right| = \prod_{\substack{p_j \mid n \\ s_j \geqslant \gamma_n}} p_j^{s_j - 1} \leqslant \left(\prod_{\substack{p_j \mid n \\ s_j \geqslant \gamma_n}} p_j^{s_j} \right)^{1-1/n}.$$

Отсюда

$$\pi_1 = \pi_1' \, \pi_1'' \leqslant C_{12} \left(\prod_{p_j \mid n} p_j^{s_j} \right)^{1-1/n}.$$

Оценим π_2, пользуясь свойством 3) сумм Гаусса. Получаем

$$\pi_2 \leqslant \prod_{\substack{(p_j, n)=1 \\ 2 \leqslant s_j \leqslant n}} p_j^{s_j - 1} \leqslant \left(\prod_{\substack{(p_j, n)=1 \\ 2 \leqslant s_j \leqslant n}} p_j^{s_j} \right)^{1-1/n}.$$

Для оценки π_3 положим $d_j = (n, p_j - 1)$. Тогда

$$\pi_3 = \prod_{\substack{(p_j, n)=1 \\ s_j = 1, \ p_j > d_j^{2n/(n-2)}}} \left|S_n(a_j, p_j)\right| \prod_{\substack{(p_j, n)=1 \\ s_j = 1, \ p_j \leqslant d_j^{2n/(n-2)}}} \left|S_n(a_j, p_j)\right| = \pi_3' \, \pi_3''.$$

Оцениваем π_3', пользуясь свойством 5) сумм Гаусса:

$$\pi_3' \leqslant \prod_{\substack{(p_j, n)=1 \\ s_j = 1, \ d_j < p_j^{1/2 - 1/n}}} d_j \, p_j^{1/2} \leqslant \left(\prod_{\substack{(p_j, n)=1 \\ s_j = 1, \ d_j < p_j^{1/2 - 1/n}}} p_j \right)^{1-1/n}.$$

Наконец, π_3'' оценим тривиально:

$$\pi_3'' \leqslant \prod_{\substack{(p_j, n)=1 \\ s_j=1,\ p_j \leqslant d_j^{2n/(n-2)}}} p_j .$$

Но $d_j | n$ и $p_j \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ d_j)$. Отсюда, используя лемму 2, находим

$$\prod_{\substack{(p_j, n)=1 \\ s_j=1,\ p_j \leqslant d_j^{2n/(n-2)}}} p_j \leqslant \prod_{d|n} \prod_{\substack{p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ d) \\ p \leqslant d^{2n/(n-2)}}} p = \exp Q_n \leqslant \exp\left\{ C_5 \, \frac{n^3}{\varphi^2(n)} \right\}.$$

Поэтому

$$\pi_3'' \leqslant \exp\left\{ C_5 \left(\frac{n}{\varphi(n)}\right)^2 \right\} \Bigg(\prod_{\substack{(p_j, n)=1 \\ s_j=1,\ p_j \leqslant d_j^{2n/(n-2)}}} p_j \Bigg)^{1-1/n},$$

$$\pi_3 = \pi_3' \, \pi_3'' \leqslant \exp\left\{ C_5 \Big(\frac{n}{\varphi(n)}\Big)^2 \right\} \Bigg(\prod_{\substack{(p_j, n)=1 \\ s_j=1}} p_j \Bigg)^{1-1/n}.$$

Собирая полученные оценки и учитывая, что $n/\varphi(n) \geqslant 1$, находим окончательно

$$|S_n(a,q)| \leqslant C_{12} \, \exp\left\{ C_5 \Big(\frac{n}{\varphi(n)}\Big)^2 \right\} \left(\prod_{j=1}^{r} p_j^{n l_j + s_j} \right)^{1-1/n} \leqslant \exp\left\{ C_1 \Big(\frac{n}{\varphi(n)}\Big)^2 \right\} q^{1-1/n},$$

и теорема доказана.

Следствие 1.

$$A_n^* \leqslant \exp\bigl\{ C_2 \, (\ln\ln n)^2 \bigr\} \qquad (n \geqslant 3).$$

В самом деле, как хорошо известно (см. [11, теорема 328]),

$$\frac{n}{\varphi(n)} \leqslant C_{13} \, \ln\ln n \qquad (n \geqslant 3).$$

Следствие 2. *Если для* $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{p|n} (1 - p^{-1})^{-1} \leqslant M,$$

то

$$A_n^* \leqslant \exp\bigl\{ C_1 M^2 \bigr\}. \tag{18}$$

Так как для $P \in \mathbb{P}$, $m \in \mathbb{N}$

$$\prod_{p|P^m} (1 - p^{-1})^{-1} = (1 - P^{-1})^{-1} \leqslant 2,$$

то отсюда вытекает утверждение (7).

Следствие 3. *Для любого* $\eta > 0$ *найдутся константа* $A(\eta)$ *и множество натуральных чисел* $\mathfrak{N}_\eta$ *плотности* $\geqslant 1 - \eta$ *такие, что*

$$\sup_{n \in \mathfrak{N}_\eta,\ n \geqslant 2} A_n^* \leqslant A(\eta). \tag{19}$$

В самом деле, последовательность $\{n/\varphi(n)\}$ имеет функцию распределения [13] (см, также [14, гл. 14]). Поэтому для любого $\eta > 0$ найдется константа $M(\eta)$ такая, что оценка $n/\varphi(n) \leqslant M(\eta)$ выполняется для множества $\mathfrak{N}_\eta$ натуральных чисел плотности $\geqslant 1 - \eta$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hardy G.H., Littlewood J.E.* A new solution of Waring's problem // Quart. J. of Math. 1920. V. 48. P. 272–293.
2. *Hardy G.H., Littlewood J.E.* Some problems of "Partitio Numerorum": I. A new solution of Waring's problem // Nachr. v. d. K. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1920. P. 33–54.
3. *Hardy G.H., Littlewood J.E.* Some problems of "Partitio Numerorum": II. Proof that every large number is the sum of at most 21 biquadrates // Math. Zeitschr. 1921. V. 9. P. 14–27.
4. *Hardy G.H., Littlewood J.E.* Some problems of "Partitio Numerorum": IV. The singular series in Waring's Problem and the value of the number $G(k)$ // Math. Zeitschr. 1922. V. 12. P. 161–188.
5. *Hardy G.H., Littlewood J.E.* Some problems of "Partitio Numerorum": VI. Futher researches in Waring's Problem // Math. Zeitschr. 1925. V. 23. P. 1–37.
6. *Hardy G.H.* Collected papers. V. 1. — Oxford, 1966.
7. *Landau E.* Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. 1. — Leipzig: Hirzel, 1927.
8. *Виноградов И.М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Труды МИАН. 1947. Т. 23. (См. также: *Виноградов И.М.* Избранные труды. — М.: Изд-во АН СССР, 1952.)
9. *Ayoub R.* An introduction to the analitic theory of numbers // Math. Surveys. Providence. A.M.S. 1963. № 10.
10. Суммирование некоторых рядов особого вида // *Гаусс К.Ф.* Труды по теории чисел. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. — С. 594–635.
11. *Hardy G.H., Wright E.M.* An introduction to the theory of numbers. 4 ed. — Oxford, 1960.
12. *Прахар К.* Распределение простых чисел. — М.: Мир, 1967.
13. *Schoenberg I.J.* Über die asymptotische Verteilung reeller Zahlen mod 1 // Math. Zeitschr. 1928. V. 28. P. 171–200.
14. *Постников А.Г.* Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Наука, 1971.