ОДНА ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА[*)]

Исследуется один тип оптимизационных задач, зависящих от разбиения отрезка $[a, b]$.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана неотрицательная ограниченная функция $f(x)$.

[*)] В кн.: Numerische Methoden der Approximadioustheorie. T. 1. — Basel: Birkhauser, 1972. — С. 205–208.

Зафиксируем функцию $\varphi(u) \geqslant 0$ $(u \geqslant 0)$ и для каждого разбиения

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$$

отрезка $[a, b]$ положим

$$m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad \omega_k = M_k - m_k \quad (k = 1, \ldots, N).$$

Построим следующий функционал, зависящий от разбиения $\mathcal{T}_N$:

$$S(\mathcal{T}_N) = S(\mathcal{T}_N, \mu) = \sum_{k=1}^{N} \varphi(\mu_k\, h_k), \tag{1}$$

где

$$h_k = x_k - x_{k-1}, \quad \mu_k = \mu_k(\mathcal{T}_N, f), \quad m_k \leqslant \mu_k \leqslant M_k \quad (k = 1, \ldots, N). \tag{2}$$

Для некоторых функций $\varphi(u)$ функционал $S(\mathcal{T}_N)$ может сильно зависеть от $\mathcal{T}_N$. Например, если $f(x) \equiv 1$, $\varphi(u) = u^2$, то в зависимости от выбора $\mathcal{T}_N$

$$S(\mathcal{T}_N) = \sum_{k=1}^{N} h_k^2$$

принимает значения в следующих пределах:

$$(b-a)^2 N^{-1} \leqslant S(\mathcal{T}_N) < (b-a)^2.$$

Положим

$$S_N = S_N(\mu) = \sup_{\mathcal{T}_N} S(\mathcal{T}_N, \mu), \tag{3}$$

$$s_N = s_N(\mu) = \inf_{\mathcal{T}_N} S(\mathcal{T}_N, \mu). \tag{4}$$

Наша задача состоит в том, чтобы изучить асимптотическое поведение S_N и s_N при $N \to \infty$. При этом в настоящей работе я занимаюсь выявлением тех случаев, когда асимптотическое поведение S_N и s_N не зависит от выбора промежуточных значений μ_k.

Для этого по аналогии с теорией интеграла Римана введем в рассмотрение верхние и нижние суммы

$$\overline{S}(\mathcal{T}_N) = \sup_{\mu} S(\mathcal{T}_N, \mu), \qquad \underline{S}(\mathcal{T}_N) = \inf_{\mu} S(\mathcal{T}_N, \mu)$$

и положим

$$\overline{S}_N = \sup_{\mathcal{T}_N} \overline{S}(\mathcal{T}_N), \qquad \underline{S}_N = \sup_{\mathcal{T}_N} \underline{S}(\mathcal{T}_N),$$

$$\overline{s}_N = \inf_{\mathcal{T}_N} \overline{S}(\mathcal{T}_N), \qquad \underline{s}_N = \inf_{\mathcal{T}_N} \underline{S}(\mathcal{T}_N),$$

так что при любом выборе промежуточных значений

$$\underline{S}_N \leqslant S_N(\mu) \leqslant \overline{S}_N, \qquad \underline{s}_N \leqslant s_N(\mu) \leqslant \overline{s}_N. \tag{5}$$

Метод исследования поставленной задачи состоит в получении асимптотически точных оценок для $\underline{S}_N$, $\overline{S}_N$ соответственно $\underline{s}_N$, $\overline{s}_N$. В случае

$$\underline{S}_N \approx \overline{S}_N \tag{6}$$

отсюда вытекает асимптотическая формула для $S_N(\mu)$, а в случае

$$\underline{s}_N \approx \overline{s}_N \tag{7}$$

— асимптотическая формула для $s_N(\mu)$. При этом в ходе исследования появляются верхние и нижние интегралы Римана

$$\overline{\int_a^{-b}} f(x)\,dx \qquad \text{и} \qquad \underline{\int_{-a}^{b}} f(x)\,dx.$$

Свойствами (6) или (7) даже для непрерывных положительных функций $f(x)$ обладают далеко не все функции $\varphi(u)$. Например, в классическом случае $\varphi(u)=u$ суммы $S(\mathcal{T}_N,\mu)$, $\overline{S}(\mathcal{T}_N)$ и $\underline{S}(\mathcal{T}_N)$ сводятся соответственно к интегральным суммам Римана и верхним и нижним суммам Дарбу, и ясно, что

$$\overline{S}_N=(b-a)\sup_{[a,b]} f(x), \qquad S_N\to\int_a^b f(x)\,dx \qquad (N\to\infty).$$

Следовательно, в этом случае асимптотика $S_N(\mu)$ существенно зависит от выбора промежуточных значений μ_k. Аналогичная ситуация имеет место и для функций $\varphi(u)$, близких к линейным. Напротив в случае $\varphi(u)=u^p$ $(0<p<1)$ асимптотическое поведение $S_N(\mu)$ не зависит от выбора μ_k.

Таким образом, наша задача сводится к выяснению вопроса о том, для каких функций $\varphi(u)$ существует достаточно широкий "допустимый класс" функций $f(x)$, для которых выполняется соотношение (6) или соотношение (7).

В настоящей работе в качестве φ я рассматриваю выпуклые и вогнутые функции. Это ограничение связано с методом исследования (применение неравенства Йенсена) и для начала представляется мне довольно естественным. Анализ задачи показывает, что если отбросить тривиальный случай $f\equiv\mathrm{const}$, то для вогнутых φ может выполняться только соотношение (6), а для выпуклых φ — только соотношение (7). При этом, как видно уже из примера $\varphi(u)=u$, на функцию φ должны быть наложены некоторые дополнительные условия. В соответствии с этим для вогнутых φ в работе изучается поведение S_N, а для выпуклых φ — поведение s_N.

Выясняются естественные ограничения на f, при которых справедливо то или иное предложение. Как правило, допустимым классом функций $f(x)$ оказывается класс $R[a,b]$ функций, интегрируемых в смысле Римана на отрезке $[a,b]$, или его подкласс, состоящий из функции $f(x)\geqslant m>0$.

В частности, устанавливается, что если

$$f(x)\in R[a,b], \qquad I=\int_a^b f(x)\,dx>0, \qquad \varphi(u)\geqslant 0,$$

φ вогнута и удовлетворяет условиям

$$\varphi(u)\to 0, \qquad \varphi(u)/u\to\infty \qquad (u\to 0),$$

то справедлива асимптотическая формула

$$S_N=N\,\varphi(IN^{-1})\,\bigl(1+o(1)\bigr) \qquad (N\to\infty), \tag{8}$$

а если

$$f(x)\in R[a,b], \qquad f(x)\geqslant m>0, \qquad \varphi(u)\geqslant 0,$$

φ выпуклая и удовлетворяет условиям

$$\varphi(\gamma u)=O\bigl(\varphi(u)\bigr) \qquad (\gamma>0), \qquad \varphi(u)/u\to 0 \qquad (u\to 0),$$

то

$$s_N=N\,\varphi(IN^{-1})\,\bigl(1+o(1)\bigr) \qquad (N\to\infty). \tag{9}$$

При некоторых дополнительных ограничениях на f и φ даются оценки остаточных членов в формулах (8) и (9).

В форме (1) записываются оценки погрешности различного рода приближенных методов, связанных с разбиением отрезка $[a, b]$ на шаги h_k, и поставленная задача представляет собою задачу об асимтотически оптимальном выборе шагов при заданном (большом) числе шагов N. В таком виде рассматриваемая задача появилась в исследованиях А.Н. Тихонова и С.С. Гайсаряна по оптимальным квадратурным формулам. Эти авторы изучали случай $\varphi(u) = u^p$, где p натуральное, $p \geqslant 2$. Для достаточно гладких f ими установлена формула (9) с оценкой остаточного члена. В настоящей работе я использую многие идеи, содержащиеся в работах А.Н. Тихонова и С.С. Гайсаряна.

Полученные в настоящей работе результаты применяются также к оценке погрешности квадратурных формул.