ОДНА ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ*)

Пусть $0 < h \leqslant \pi$. Обозначит через $K(h)$ класс функций $f(x)$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$, обладающих следующими свойствами:

1) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$;
2) $a_n \geqslant 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$;
3) $f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$;
4) $f(x) = 0$ для $h \leqslant |x| \leqslant \pi$.

Классы $K(h)$ непусты. Например, непрерывная четная функция $\varphi_h(x)$, определяемая условиями $\varphi_h(0) = 1$, $\varphi_h(x) = 0$ для $h \leqslant |x| \leqslant \pi$, $\varphi_h(x)$ линейна на отрезке $[0, h]$, принадлежит $K(h)$, так как

$$\varphi_h(x) = \frac{h}{2\pi} + \frac{h}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\sin(nh/2)}{nh} \right)^2 \cos nx.$$

В беседе со мною в мае 1970 г. П. Туран поставил следующую задачу. Оценить на классе $K(h)$ величину

$$\pi a_0 = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^h f(x)\,dx.$$

В силу неравенства $f(x) \leqslant f(0)$ и условия 4) имеем

$$\int_0^h f(x)\,dx < h,$$

а для функции $\varphi_h(x)$

$$\int_0^h \varphi_h(x)\,dx = \frac{h}{2}. \tag{1}$$

Таким образом, если положить

$$A(h) = \sup_{f \in K(h)} \int_0^h f(x)\,dx, \tag{2}$$

то справедливы неравенства

$$\frac{h}{2} \leqslant A(h) \leqslant h. \tag{3}$$

Здесь я доказываю, что

$$A\left(\frac{2\pi}{N}\right) = \frac{\pi}{N} \quad (N = 2, 3, \ldots), \tag{4}$$

*) Acta Math. Acad. Scient. Hungaricae. 1972. T. 23 (3–4). P. 289–291.

откуда

$$A(h) = \frac{h}{2} + O(h^2). \tag{5}$$

В силу условий 2) и 4) для любой непрерывной четной функции $\varphi(x)$ с неотрицательными коэффициентами Фурье и для любой $f \in K(h)$ выполняется неравенство

$$\int_0^h f(x)\,\varphi(x)\,dx \geqslant 0. \tag{6}$$

Пусть сперва $h = 2\pi/N$ $(N = 2, 3, \ldots)$. Положим

$$\varphi(x) = \varphi_\eta(Nx) - \frac{\eta}{2\pi} \qquad (0 < \eta < \pi). \tag{7}$$

Имеем

$$0 \leqslant \int_0^h f(x)\left(\varphi_\eta(Nx) - \frac{\eta}{2\pi}\right)\,dx = \int_0^h f(x)\,\varphi_\eta(Nx)\,dx - \frac{\eta}{2\pi}\int_0^h f(x)\,dx.$$

Но при $\eta \to 0$

$$\int_0^h f(x)\,\varphi_\eta(Nx)\,dx = \frac{\eta}{2N}\bigl(f(0) + f(h) + o(1)\bigr) = \frac{\eta}{2N}\bigl(1 + o(1)\bigr).$$

Поэтому

$$\int_0^{2\pi/N} f(x)\,dx \leqslant \frac{\pi}{N},$$

и это неравенство обращается в равенство для $\varphi_{2\pi/N}(x)$. Таким образом,

$$A\left(\frac{2\pi}{N}\right) = \frac{\pi}{N} \quad (N = 2, 3, \ldots).$$

Наконец, если $f \in K(h)$, где $2\pi/(N+1) < h < 2\pi/N$, то

$$\int_0^h f(x)\,dx \leqslant \int_0^{2\pi/N} f(x)\,dx \leqslant \frac{\pi}{N} < \frac{1}{1 - h/(2\pi)} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{2} + O(h^2);$$

сопоставляя эту оценку с равенством (1), получаем, что

$$A(h) = \frac{h}{2} + O(h^2).$$

В частности,

$$\lim_{h \to +0} \frac{A(h)}{h} = \frac{1}{2}\,. \tag{8}$$