О НУЛЯХ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА *)

1. Введение. Все комплексные (так называемые “нетривиальные”) нули $\rho = \beta + i\gamma$ дзета-функции Римана $\zeta(\sigma + it)$ лежат в критической полосе $0 < \sigma < 1$ и расположены симметрично относительно действительной оси и относительно критической прямой $\sigma = 1/2$. Поэтому достаточно исследовать положение нулей с $\beta \geqslant 1/2$, $\gamma > 0$. Эти нули можно разделить на три типа: нули с большими, малыми и средними ординатами.

Для нулей с большими ординатами наилучшие оценки получаются применением метода тригонометрических сумм; см. [1–3]. Для нулей с малыми ординатами численными расчетами удается показать, что они лежат на критической прямой; см. [1] и [4–10]. К настоящему времени посредством вычислений на ЭВМ установлено, что первые $3,5 \cdot 10^6$ комплексных нулей $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ лежат на прямой $\sigma = 1/2$. Остается конечный участок значений t, на котором наилучшие оценки для нулей $\zeta(\sigma + it)$ получаются аналитическими методами, восходящими к Ш.Ж. де ла Валле Пуссену [11]. Как показал Б. Россер [12, 13], этот участок играет важную роль в задачах оценки простых чисел. Исследованию нулей дзета-функции на этом среднем участке и посвящена настоящая работа.

Валле Пуссен [11] доказал, что

$$\zeta(\sigma + it) \neq 0, \qquad \sigma \geqslant 1 - \frac{1}{R \ln t} \qquad (t \geqslant T) \tag{1}$$

для некоторого (довольно большого) R и $T = 12$.

Пусть P_n $(n \geqslant 2)$ есть класс четных тригонометрических полиномов

$$p_n(\varphi) = a_0 + a_1 \cos\varphi + \ldots + a_n \cos n\varphi,$$

удовлетворяющих условиям: $p_n(\varphi) \geqslant 0$ для всех φ, $a_k \geqslant 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, $a_0 < a_1$. Положим

$$V(p_n) = \frac{p_n(0) - a_0}{\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_0}\right)^2} = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_0}\right)^2}, \tag{2}$$

$$V = \lim_{n \to \infty} \inf_{p_n \in P_n} V(p_n). \tag{3}$$

Э. Ландау (см. [14, § 79]) доказал, что для любого $\varepsilon > 0$ в неравенствах (1) можно положить

$$R = \frac{1}{2} V + \varepsilon, \qquad T = T(\varepsilon). \tag{4}$$

Г. Вестфаль [15] показал, что можно взять $R = 17,537$, $T = 200$, а Б. Россер и Л. Шёнфельд [16] установили это для $R = 17,516\ldots$ $T = e^{9,99}$. Из моей работы [17] вытекает, что возможности оценки R на основе (4) исчерпаны почти полностью.

Развивая идеи Валле Пуссена [11], я доказываю здесь, что для любого $\varepsilon > 0$ в неравенствах (1) можно положить

$$R = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} V + \varepsilon, \qquad T = T(\varepsilon), \tag{5}$$

и получаю таким путем

$$R = 9,65, \qquad T = 12. \tag{6}$$

*) Матем. заметки. 1970. Т. 8, вып. 4. С. 419–429.

Новыми являются леммы 2 и 3. Остальные рассуждения следуют известным канонам.

2. Вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Пусть* $s=\sigma+it,\ 0\leqslant\sigma\leqslant 2,\ t\geqslant T>0$. *Тогда*

$$\frac{1}{2}\ln t+A_1\leqslant\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(1+\frac{s}{2}\Big)\leqslant\frac{1}{2}\ln t+A_2, \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}A_1&=-\frac{1}{2}\ln 2-\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{T}\Big)\frac{1}{T},\\ A_2&=-\frac{1}{2}\ln 2+\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{4}{T}\Big)\frac{1}{T}.\end{aligned} \tag{8}$$

Доказательство. Будем исходить их формулы

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\ln z-\frac{1}{2z}+\int_0^\infty\frac{x-[x]-1/2}{(x+z)^2}\,dx\qquad(\,\mathrm{Re}\,z>0), \tag{9}$$

в которой берется главная ветвь $\ln z$ (см. [15] или [18]). Полагая $z=1+s/2$, находим

$$\mathrm{Re}\ \ln z=\ln|z|=\ln t-\ln 2+\frac{1}{2}\ln\Big\{1+\Big(\frac{\sigma+2}{t}\Big)^2\Big\},$$

откуда

$$\ln t-\ln 2<\ \mathrm{Re}\ \ln\Big(1+\frac{s}{2}\Big)<\ln t-\ln 2+\frac{1}{2}(\sigma+2)^2t^{-2}.$$

Далее,

$$\left|\int_0^\infty\frac{x-[x]-1/2}{(x+z)^2}\,dx\right|\leqslant\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dx}{(x+\sigma+1/2)^2+(t/2)^2}\leqslant\frac{\pi}{2}\,t^{-1}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(1+\frac{s}{2}\Big)\leqslant\frac{1}{2}\ln t-\frac{1}{2}\ln 2+\Big(\frac{\sigma}{2}+1\Big)^2t^{-2}+\frac{\pi}{4}\,t^{-1}\leqslant\frac{1}{2}\ln t+A_2,$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(1+\frac{s}{2}\Big)\geqslant\frac{1}{2}\ln t-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\sigma+2}{2}\,t^{-2}-\frac{\pi}{4}\,t^{-1}\geqslant\frac{1}{2}\ln t+A_1,$$

и лемма доказана.

Аналогичные оценки см. в [11] и [15].

Лемма 2. *Пусть*

$$u\geqslant 0,\quad 0<\alpha\leqslant\frac{1}{2},\quad \sigma>1,\quad \tau=\frac{1}{2}\big(1+\sqrt{1+4\sigma^2}\big). \tag{10}$$

Тогда

$$\frac{\sigma-\alpha}{(\sigma-\alpha)^2+u}+\frac{\sigma-1+\alpha}{(\sigma-1+\alpha)^2+u}\geqslant\frac{1}{\sqrt{5}}\Big\{\frac{\tau-\alpha}{(\tau-\alpha)^2+u}+\frac{\tau-1+\alpha}{(\tau-1+\alpha)^2+u}\Big\}. \tag{11}$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{\sigma-\alpha}{(\sigma-\alpha)^2+u}+\frac{\sigma-1+\alpha}{(\sigma-1+\alpha)^2+u}\geqslant\frac{2\sigma-1}{(\sigma-\alpha)^2+u}.$$

Поэтому достаточно доказать, что для всех $u\geqslant 0,\ 0<\alpha\leqslant 1/2$

$$F(\alpha,u)=(\tau-\alpha)\frac{(\sigma-\alpha)^2+u}{(\tau-\alpha)^2+u}+(\tau-1+\alpha)\frac{(\sigma-\alpha)^2+u}{(\tau-1+\alpha)^2+u}\leqslant\sqrt{5}\,(2\sigma-1).$$

Рассмотрим отдельно два случая.

Пусть $\sigma-\alpha\leqslant\tau-1+\alpha$. Тогда $\partial F/\partial u>0,\ F\uparrow$,

$$\sup_{u\geqslant 0}F(\alpha,u)=F(\alpha,\infty)=2\tau-1.$$

Пусть $\sigma-\alpha>\tau-1+\alpha$. Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial u}=B(u)\Big\{\frac{(\tau-\alpha)\left((\tau-\alpha)^2-(\sigma-\alpha)^2\right)}{(\tau-1+\alpha)\left((\sigma-\alpha)^2-(\tau-1+\alpha)^2\right)}-\left(\frac{(\tau-\alpha)^2+u}{(\tau-1+\alpha)^2+u}\right)^2\Big\},$$

где

$$B(u)=\frac{(\tau-1+\alpha)\left((\sigma-\alpha)^2-(\tau-1+\alpha)^2\right)}{\left((\tau-\alpha)^2+u\right)^2}>0.$$

Выражение в фигурных скобках есть возрастающая функция от u. Поэтому $\partial F/\partial u$ либо сохраняет постоянный знак, либо меняет знак с $-$ на $+$. Отсюда вытекает, что

$$\begin{gathered}\sup_{u\geqslant 0}F(\alpha,u)=\max\left\{F(\alpha,0),\ F(\alpha,\infty)\right\}=\max\left\{2\tau-1,\ \varphi(\alpha)\right\},\\ \varphi(\alpha)=\frac{(\sigma-\alpha)^2}{\tau-\alpha}+\frac{(\sigma-\alpha)^2}{\tau-1+\alpha}.\end{gathered}\tag{12}$$

Это верно и в первом случае. Таким образом, формула (12) справедлива всегда. Но $\varphi(\alpha)\downarrow\ \ (0<\alpha\leqslant 1/2)$, откуда

$$\varphi(\alpha)\leqslant\varphi(0)=\sigma^2(2\tau-1)\left(\tau(\tau-1)\right)^{-1}.$$

Итак,

$$\sup_\alpha\sup_u F(\alpha,u)\leqslant\max\left\{2\tau-1,\ \sigma^2(2\tau-1)\left(\tau(\tau-1)\right)^{-1}\right\}.$$

Но $\tau(\tau-1)=\sigma^2,\ \ 2\tau-1=\sqrt{1+4\sigma^2}$. Поэтому для всех $u\geqslant 0,\ 0<\alpha\leqslant 1/2$

$$F(\alpha,u)\leqslant\sqrt{1+4\sigma^2}<\sqrt{5}\,(2\sigma-1),$$

и лемма доказана.

Замечания. 1) Неравенство (11) точно в следующем смысле. Пусть $\forall\sigma>1$ $\exists\tau>\sigma\ \forall u\geqslant 0\ \forall\alpha\ \ (0<\alpha\leqslant 1/2)$

$$\frac{\sigma-\alpha}{(\sigma-\alpha)^2+u}+\frac{\sigma-1+\alpha}{(\sigma-1+\alpha)^2+u}\geqslant k\left\{\frac{\tau-\alpha}{(\tau-\alpha)^2+u}+\frac{\tau-1+\alpha}{(\tau-1+\alpha)^2+u}\right\}.\tag{13}$$

Тогда $k\leqslant 1/\sqrt{5}$.

2) В случае $u=0$ неравенство (11) допускает следующее усиление: при выполнении остальных условий (10)

$$\frac{1}{\sigma-\alpha}\geqslant\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\tau-\alpha}+\frac{1}{\tau-1+\alpha}\right).\tag{14}$$

В самом деле, функция

$$\varphi_1(\alpha)=\frac{\sigma-\alpha}{\tau-\alpha}+\frac{\sigma-\alpha}{\tau-1+\alpha}$$

убывает, и (14) сводится к очевидному неравенству

$$\sqrt{1+4\sigma^2}\leqslant\sqrt{5}\,\sigma\qquad(\sigma>1).$$

Положим

$$f(s) = \operatorname{Re}\Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)\Big), \qquad \varkappa = \frac{1}{\sqrt{5}}. \tag{15}$$

Лемма 3. *Пусть*

$$1 < \sigma \leqslant \frac{5}{4}, \quad \sigma_1 = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4\sigma^2}\right), \quad s = \sigma+it, \quad s_1 = \sigma_1+it, \quad t \geqslant T \geqslant 12. \tag{16}$$

Тогда

$$f(s) - \varkappa f(s_1) \leqslant \frac{1-\varkappa}{2}\ln t + A_3, \tag{17}$$

где

$$A_3 = (1-\varkappa)\Big(\frac{C}{2}+1-\frac{3}{2}\ln 2-\ln\pi\Big) + \Big(\frac{\pi}{4}+\frac{4}{T}\Big)\frac{1}{T} + \varkappa\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{T}\Big)\frac{1}{T} \tag{18}$$

и C обозначает эйлерову постоянную; если, кроме того, $\zeta(s)$ имеет нуль вида $\beta+it$, $\beta > 1/2$, то

$$f(s) - \varkappa f(s_1) \leqslant \frac{1-\varkappa}{2}\ln t - \frac{1}{\sigma-\beta} + A_3. \tag{19}$$

Доказательство. Отметим, что $(1+\sqrt{5})/2 < \sigma_1 < 2$. Как хорошо известно (см. [14, § 76] или [1, с. 41]),

$$f(s) = A_4 + \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2} + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(1+\frac{s}{2}\Big) - \\ - \sum_\rho\Big\{\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2}\Big\} \qquad (\sigma > 1),$$

где сумма $\sum_\rho$ распространена на все комплексные нули $\rho = \beta + i\gamma$ функции $\zeta(s)$, а

$$A_4 = 1 - \ln 2\pi + \frac{C}{2}.$$

Учитывая, что комплексные нули $\zeta(s)$ расположены симметрично относительно критической прямой, можем написать

$$\sum_\rho \frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} = \sum_{\rho=1/2+i\gamma}\frac{\sigma-1/2}{(\sigma-1/2)^2+(t-\gamma)^2} + \\ + \sum_{\rho=\beta+i\gamma,\ \beta>1/2}\Big\{\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} + \frac{\sigma-1+\beta}{(\sigma-1+\beta)^2+(t-\gamma)^2}\Big\}.$$

Но по лемме 2

$$\frac{\sigma-1/2}{(\sigma-1/2)^2+(t-\gamma)^2} - \varkappa\frac{\sigma_1-1/2}{(\sigma_1-1/2)^2+(t-\gamma)^2} \geqslant 0,$$

$$\frac{\sigma-1+\beta}{(\sigma-1+\beta)^2+(t-\gamma)^2} + \frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} - \\ - \varkappa\Big\{\frac{\sigma_1-1+\beta}{(\sigma_1-1+\beta)^2+(t-\gamma)^2} + \frac{\sigma_1-\beta}{(\sigma_1-\beta)^2+(t-\gamma)^2}\Big\} \geqslant 0.$$

Отсюда

$$f(s)-\varkappa f(s_1)\leqslant(1-\varkappa)A_4+\frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2}-\varkappa\frac{\sigma_1-1}{(\sigma_1-1)^2+t^2}+$$
$$+\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Bigl(1+\frac{s}{2}\Bigr)-\frac{\varkappa}{2}\,\mathrm{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Bigl(1+\frac{s_1}{2}\Bigr).$$

Далее, нетрудно подсчитать, что при $t\geqslant 12$

$$\frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2}\leqslant\varkappa\frac{\sigma_1-1}{(\sigma_1-1)^2+t^2}.$$

Поэтому, учитывая лемму 1, выводим, что

$$f(s)-\varkappa f(s_1)\leqslant\frac{1-\varkappa}{2}\ln t+(1-\varkappa)A_4+A_2-\varkappa A_1=\frac{1-\varkappa}{2}\ln t+A_3.$$

Если же $\zeta(s)$ имеет нуль вида $\rho=\beta+it$, $\beta>1/2$, то, сохраняя в сумме $\sum_\rho$ член с $\gamma=t$ и учитывая замечание 2) к лемме 2, получаем аналогично

$$f(s)-\varkappa f(s_1)\leqslant\frac{1-\varkappa}{2}\ln t-\frac{1}{\sigma-\beta}+A_3,$$

и лемма доказана.

Отметим еще, что (см. [15, лемма 4])

$$f(\sigma)<\frac{1}{\sigma-1}+\frac{\sigma-1}{\sigma}\qquad(\sigma>1).\tag{20}$$

3. Основные теоремы.

Теорема 1. *Пусть V определяется формулой* (3). *Для любого $\varepsilon>0$ функция $\zeta(\sigma+it)$ не имеет нулей в области*

$$\sigma\geqslant 1-\frac{1}{R\ln t}\qquad(t\geqslant T),\tag{21}$$

где

$$R=\frac{5-\sqrt{5}}{10}V+\varepsilon,\qquad T=T(\varepsilon).\tag{22}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$, $1<\sigma\leqslant 5/4$, $\sigma_1=(1+\sqrt{1+4\sigma^2})/2$. Зафиксируем полином

$$p_n(\varphi)=a_0+a_1\cos\varphi+\ldots+a_n\cos n\varphi$$

из класса P_n, для которого $V(p_n)\leqslant V+\varepsilon$, и рассмотрим сумму

$$S(t)=\sum_{k=0}^{n}a_k\bigl(f(\sigma+ikt)-\varkappa f(\sigma_1+ikt)\bigr).\tag{23}$$

Так как (см. [9, гл. 1])

$$f(\sigma+it)=\sum_{\nu=2}^{\infty}\Lambda(\nu)\,\nu^{-\delta}\cos(t\,\ln\nu)\qquad(\sigma>1),$$

где $\Lambda(\nu)\geqslant 0$, то

$$S(t)=\sum_{\nu=2}^{\infty}\Lambda(\nu)\,(\nu^{-\sigma}-\varkappa\nu^{-\sigma_1})\,p_n(t\,\ln\nu)\geqslant 0.\tag{24}$$

С другой стороны, допустим, что $\zeta(\rho)=0$ в точке $\rho=\beta+it$, $\beta>1/2$. Оценим $S(t)$ сверху. Используя лемму 3 и неравенство (20), находим

$$S(t)\leqslant \frac{a_0}{\sigma-1}-\frac{a_1}{\sigma-\beta}+\sum_{k=1}^{n}a_k\,\frac{1-\varkappa}{2}\,\ln t+a_0\Big(\frac{\sigma-1}{\sigma}-\varkappa\,f(\sigma_1)\Big)+A_5, \tag{25}$$

где

$$A_5=\sum_{k=1}^{n}a_k\,A_3+\frac{1-\varkappa}{2}\sum_{k=2}^{n}a_k\,\ln k. \tag{26}$$

Так как $1<\sigma<5/4$ и $f(\sigma_1)>f(2)>0,569$ (см. [16, табл. IV]), то $(\sigma-1)\sigma^{-1}-$ $-\varkappa\,f(\sigma_1)<0$. Поэтому из (24) и (25) вытекает, что

$$\frac{a_1}{\sigma-\beta}\leqslant\frac{a_0}{\sigma-1}+K, \tag{27}$$

где

$$K=\sum_{k=1}^{n}a_k\,\frac{1-\varkappa}{2}\,\ln t+A_5. \tag{28}$$

Полагая в неравенстве (27)

$$\sigma=1+\big(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_0}\big)\sqrt{a_0}\,K^{-1}$$

(так что $\sigma\leqslant 5/4$ при $t\geqslant T(\varepsilon)$), получаем

$$\beta<1-\big(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_0}\big)\,K^{-1}=1-\left(\frac{1-\varkappa}{2}\,V(p_n)\,\ln t+\frac{A_5}{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_0})^2}\right)^{-1}.$$

Но при $t\geqslant T(\varepsilon)$ будет выполнятся неравенство $R\ln t>2$ и

$$\frac{1-\varkappa}{2}\,V(p_n)\,\ln t+\frac{A_5}{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_0})^2}<\frac{1-\varkappa}{2}\,(V+\varepsilon)\,\ln t+A_5\,\big(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_0}\big)^{-2}<$$
$$<\Big(\frac{1-\varkappa}{2}\,V+\varepsilon\Big)\,\ln t,$$

откуда и вытекает утверждение теоремы.

Теорема 2. *Дзета-функция $\zeta(\sigma+it)$ не имеет нулей в области*

$$\sigma\geqslant 1-\frac{1}{R\ln t}\qquad(t\geqslant T), \tag{29}$$

где

$$R=9,56;\qquad T=12. \tag{30}$$

Доказательство. Рассмотрим тригонометрический полином

$$p(\varphi)=(0,28+\cos\varphi)^2\,(0,91+\cos\varphi)^2=\sum_{k=0}^{4}a_k\,\cos k\varphi,$$

так что

$$a_0=1,40277\ldots;\ \ a_1=2,39142\ldots;\ \ a_2=1,46285\ldots;\ \ a_3=0,595;\ \ a_4=0,125.$$

Как показывает подсчет,

$$34,8<V(p)<34,9;\qquad \frac{1-\varkappa}{2}\,V(p)<9,65.$$

Повторим с эти полиномом доказательство теоремы 1. Для этого вычислим константу A_5 из (26). Имеем

$$A_5 = (1-\varkappa)\left\{\left(\frac{C}{2}+1-\frac{3}{2}\ln 2-\ln\pi\right)\sum_{k=1}^{4} a_k + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{4} a_k \ln k\right\} + \\ + T^{-1}\left\{(1+\varkappa)\frac{\pi}{4}+2(2+\varkappa)T^{-1}\right\}\sum_{k=1}^{4} a_k.$$

Вычисления показывают, что $A_5 < 0$ при $T \geqslant 12$. Кроме того,

$$\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_0}\right)\sqrt{a_0}\left\{\frac{1-\varkappa}{2}\sum_{k=1}^{4} a_k \ln T\right\}^{-1} < \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{9,65\ln T} < \frac{1}{2} \qquad (T \geqslant 12).$$

Поэтому в (27)–(28) можно отбросить член A_5, откуда

$$\beta < 1 - \frac{1}{9,65\ln t}, \qquad t \geqslant 12,$$

и теорема доказана.

Отметим, что неравенство $\zeta(\sigma+it) \neq 0$ $(0 < |t| \leqslant 12)$ было установлено еще фон Мангольдтом [20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Титчмарш Е.К.* Теория дзета-функции Римана. — М.: ИЛ, 1953.
2. *Прахар К.* Распределение простых чисел. — М.: Мир, 1967.
3. *Walfisz A.* Weilsche Exponentialsummen in der neuren Zahlentheorie. — Berlin, 1963.
4. *Turing A.M.* Some calculations of the Riemann zeta-function // Proc. London Math. Soc. 1953. V. 3. P. 99.
5. *Lehmer D.H.* On the roots of the Riemann zeta-function // Acta math. 1956. V. 95. P. 291–298.
6. *Lehmer D.H.* Extended computations of the Riemann zeta-function // Mathematika. 1956. V. 3. P. 102–108.
7. *Меллер Н.А.* О вычислениях, связанных с проверкой гипотезы Римана // Докл. АН СССР. 1958. Т. 123. С. 246–248.
8. *Haselgrove C.B., Miller J.C.P.* Tables of the Riemann zeta-function // Royal Soc. Math. Tables 6. — Cambridge, 1960.
9. *Lehman R.S.* Separation of zeros of the Riemann zeta-function // Math. Comp. 1966. V. 20. P. 523.
10. *Rosser J.B., Schoenfeld L., Yohe J.M.* Rigorous computations and the zeros of the Riemann zeta-function // IFJP Congress, 1968. — Amsterdam, 1968. — P. 13–18.
11. *de la Vallée Poussin Ch.-J.* Sur la fonction de Riemann et le nombre des nombres premiers inferieurs a une limite donnée // Memoires couronnés et autres Memoires publies par l'Academie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. 1899. V. 59. P. 1–74.
12. *Rosser B.* The n-th prime is greater than $n\log n$ // Proc. London Math. Soc. (2). 1939. V. 45. P. 21–44.
13. *Rosser B.* Explicit bounds for some functions of prime numbers // Amer J. Math. 1941. V. 63. P. 211–232.
14. *Landau E.* Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. — Leipzig und Berlin, 1909.

15. *Westphal H.* Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunction im kritischen Streifen // Schriften des Math. Seminars und des Instituts fur angewandte Math. der Universitat Berlin. 1938. 4. H. 1. P. 1–31.
16. *Rosser J.B., Schoenfeld L.* Approximate formulas for some functions of prime numbers // Illinois J. Math. 1962. V. 6. P. 64–94.
17. *Стечкин С.Б.* О некоторых экстремальных свойствах положительных тригонометрических полиномов // Матем. заметки. 1970. Т. 7, вып. 4. С. 411–422.
18. *Bieberbach L.* Lehrbuch der Funktionentheorie. Bd. I. — Berlin, 1921.
19. *Ингам А.Е.* Распределение простых чисел. — М.—Л., 1936.
20. *von Mangoldt H.* Zu Riemanns Abhandlung "Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse" // J. reine und angew. Math. 1895. V. 114. P. 255–305.