ПРОСТОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ЧЕБЫШЕВА О ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ*)

Теорема. *Для любого* $t \geqslant 7/2$ *найдется простое число* p, *удовлетворяющее неравенствам* $t < p \leqslant 2t - 2$.

Это предложение, устанавливающее справедливость постулата Бертрана [1], принадлежит П.Л. Чебышеву [2]. Наше доказательство полностью основано на идеях Чебышева и проще, чем все опубликованные до сих пор; см. [2–5].

Как обычно, полагаем

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqslant x} \ln p, \qquad \psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \vartheta(x^{1/m}). \tag{1}$$

Мы будем основываться на *тождестве Чебышева* (см. [5])

$$T(x) = \sum_{n \leqslant x} \psi\Big(\frac{x}{n}\Big) = \sum_{n \leqslant x} \ln n. \tag{2}$$

Оценка $\vartheta(x) - \vartheta(x/2)$. Положим

$$U(x) = T(x) - 2\,T\Big(\frac{x}{2}\Big) = \sum_{n \leqslant x} (-1)^{n+1}\,\psi\Big(\frac{x}{n}\Big).$$

Так как $\psi\uparrow$, то отсюда вытекает, что

$$\psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) \leqslant U(x) \leqslant \psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) + \psi\Big(\frac{x}{3}\Big),$$

т.е.

$$U(x) - \psi\Big(\frac{x}{3}\Big) \leqslant \psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) \leqslant U(x). \tag{3}$$

Из (1) выводим аналогично

$$\psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1}\,\vartheta(x^{1/m}) \leqslant \vartheta(x) \leqslant \psi(x).$$

Отсюда и из первого неравенства (3)

$$\vartheta(x) - \vartheta\Big(\frac{x}{2}\Big) \geqslant \psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) \geqslant U(x) - \psi\Big(\frac{x}{3}\Big) - 2\psi(\sqrt{x}). \tag{4}$$

Оценка U. Имеем

$$U(x) = T(x) - 2\,T\Big(\frac{x}{2}\Big) = \sum_{n \leqslant x} \ln n - 2 \sum_{n \leqslant x/2} \ln 2n + 2\Big[\frac{x}{2}\Big]\,\ln 2 = \\ = 2\Big[\frac{x}{2}\Big]\,\ln 2 + \sum_{n \leqslant x} (-1)^{n+1} \ln n.$$

Так как $\ln u\uparrow$, то отсюда следует, что

$$x\,\ln 2 - \ln x - 2\ln 2 \leqslant U(x) \leqslant x\,\ln 2 + \ln x. \tag{5}$$

*) Успехи матем. наук. 1968. Т. 23, вып. 5(143). С. 221–222.

О ц е н к а ψ. Положим

$$V(x) = x\,2\,\ln 2 + (2\,\ln 2)^{-1}\ln^2 x + \frac{1}{2}\,\ln x.$$

Учитывая (5) и второе неравенство (3), находим

$$V(x) - V\Big(\frac{x}{2}\Big) = x\,\ln 2 + \ln x \geqslant U(x) \geqslant \psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big).$$

Отсюда, используя на последнем шаге, что $V\uparrow$, получаем

$$V(x) - \psi(x) \geqslant V\Big(\frac{x}{2}\Big) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) \geqslant \ldots \geqslant V(1) \qquad (x \geqslant 1).$$

Следовательно, для любого $x \geqslant 1$

$$\psi(x) \leqslant V(x) - V(1) = x\,2\,\ln 2 + (2\,\ln 2)^{-1}\ln^2 x + \frac{1}{2}\,\ln x - 2\,\ln 2, \tag{6}$$

$$\psi\Big(\frac{x}{3}\Big) \leqslant \frac{2\,\ln 2}{3}x + \frac{\ln^2 x}{2\,\ln 2} + \frac{1}{2}\ln x - 2\,\ln 2 \qquad (x \geqslant 3). \tag{7}$$

З а в е р ш е н и е   д о к а з а т е л ь с т в а. Используя оценки (4), (5), (6) и (7), находим, что при $x \geqslant 4$

$$\sum_{x/2<p\leqslant x-2} \ln p \geqslant \vartheta(x) - \vartheta\Big(\frac{x}{2}\Big) - \ln x \geqslant$$

$$\geqslant W(x) = \frac{\ln 2}{3}x - 4\,\ln 2 \cdot \sqrt{x} - \frac{3}{4\,\ln 2}\ln^2 x - 3\,\ln x + 4\,\ln 2. \tag{8}$$

Вычисления показывают, что $W(800) > 0$ и $W'(800) > 0$. Так как, очевидно, $W'\uparrow$, то $W'(x) > 0$ и $W(x) > 0$ $(x \geqslant 800)$. Отсюда и из (8) вытекает, что для любого $t \geqslant 400$ найдется простое число p, удовлетворяющее неравенствам $t < p \leqslant 2t - 2$. Наконец, цепочка простых 5, 7, 11, 19, 31, 59, 113, 223, 443 показывает, что это свойство сохраняется и для $7/2 \leqslant t \leqslant 400$, и теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bertrand J.* Mémpire sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand un *y* permute les lettres qu'elle renferme // Journ. de l'École Polytechnique 1845. V. 18. P. 123–140.
2. *Tchebychef P.* Mémoire sur les nombres premiers // Journ. Math. pures et appl. 1852. (1) 17. C. 366–390. (См. также: Полное собрание сочинений П.Л. Чебышева. Т. 1. — М., 1944. — С. 191–207.)
3. *Landau E.* Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Bd. 1. — Leipzig, 1909.
4. *Finsler P.* Über die Primzahlen zwischen n und $2n$. — Zürich: Speiser-Festschrift, 1945.
5. *Трост Э.* Простые числа. — М.: ИЛ, 1959.