О НЕРАВЕНСТВАХ МЕЖДУ ВЕРХНИМИ ГРАНЯМИ ПРОИЗВОДНЫХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦИИ НА ПОЛУПРЯМОЙ [*)]

1. Введение. Пусть I есть числовая прямая или полупрямая и $f(x)$ — действительная функция, определенная на I и имеющая $(n-1)$-ю производную, удовлетворяющую условию Липшица. Положим

$$M_k = \|f^{(k)}\|_I = \sup_{x\in I} |f^{(k)}(x)| \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

причем M_n принимается как верхняя грань производных чисел функции $f^{(n-1)}(x)$.

Хорошо известно (см., например, [1], [2]), что если $n \geqslant 2$, $M_0 < \infty$ и $M_n < \infty$, то $M_k < \infty$ $(1 \leqslant k < n)$ и выполняются неравенства

$$M_k \leqslant C_{nk}(I)\, M_0^{1-k/n}\, M_n^{k/n} \qquad (1 \leqslant k < n), \tag{1}$$

где константа $C_{nk}(I)$ зависит от n, k и от вида I, но не зависит от f.

Обозначим через $C^*_{nk}(I)$ наилучшую (наименьшую возможную) константу в неравенстве (1). В случае $I = (-\infty, +\infty)$ А.Н. Колмогоров [3, 4] нашел значения $C^*_{nk}(-\infty, +\infty)$ при всех n и k. В частности, оказалось, что

$$1 < C^*_{nk}(-\infty, +\infty) < \frac{\pi}{2} \qquad (1 \leqslant k < n;\ n = 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

Аналогичная задача для полупрямой до сих пор не решена. Положим для краткости $C^*_{nk} = C^*_{nk}(0, \infty)$. Значения C^*_{nk} определены только для $n = 2$ и $n = 3$ (см. [5–8]). Именно,

$$C^*_{2,1} = 2, \qquad C^*_{3,1} = 3^{5/3}/2, \qquad C^*_{3,2} = 2 \cdot 3^{1/3}. \tag{3}$$

Для произвольных n и k оценки C^*_{nk} сверху были получены А. Горным [9, 10], А. Картаном [11, 12], А.П. Маториным [7], Ю.И. Любичем [13] и автором [8]. Наиболее сильной является оценка А.П. Маторина:

$$C^*_{nk} \leqslant P_{nk} = T_n^{(k)} \left(T_n^{(n)}\right)^{-k/n} \qquad (1 \leqslant k < n;\ n = 2, 3 \ldots), \tag{4}$$

где

$$T_n^{(k)} = \frac{n(n+k-1)!\, k!\, 2^k}{(n-k)!\, (2k)!} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n). \tag{5}$$

Что касается оценок C^*_{nk} снизу, то в силу (2) имеем

$$1 < C^*_{nk}(-\infty, +\infty) \leqslant C^*_{nk} \qquad (1 \leqslant k < n;\ n = 2, 3, \ldots). \tag{6}$$

Кроме того, из результатов В.М. Оловянишникова [14] непосредственно вытекает, что

$$C^*_{nk} \geqslant Q_{nk} = \frac{(n!)^{1-k/n}}{(n-k)!} \qquad (1 \leqslant k < n;\ n = 2, 3, \ldots). \tag{7}$$

*) Матем. заметки. 1967. Т. 1, вып. 6. С. 665–674.

Однако все эти оценки еще недостаточны для того, чтобы хотя бы приблизительно выяснить поведение C^*_{nk} для всех n и всех $k < n$.

В настоящей работе вводятся для C^*_{nk} новые оценки снизу, которые для $k \leqslant n/2$ лучше, чем (7). Интерес к такого рода оценкам возник у меня в связи с тем, что они используются при исследовании наилучших приближений операторов дифференцирования (см. [15]). Сопоставляя новые оценки с уже известными, я определяю точный порядок роста $\ln C^*_{nk}$ при всех n и всех $k < n$, а также доказываю, что при $p = \min\{k,\ n-k\} = o(n)$ справедлива асимптотическая формула

$$\ln C^*_{nk} = p\,\ln\frac{n}{p} + O(p). \tag{8}$$

В дальнейшем постоянно будут использоваться следующие неравенства для $n!$:

$$n^n e^{-n} < \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}\, e^{-n} < n! \leqslant e\, n^{n+1/2}\, e^{-n} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Оценки $n!$ снизу немедленно вытекают из формулы Стирлинга, а для получения оценки сверху положим

$$a_n = n^{n+1/2}\, e^{1-n} (n!)^{-1}.$$

Тогда $a_1 = 1$ и

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1/2} e^{-1} > 1.$$

Отсюда $a_n \geqslant 1$, т.е. $n! \leqslant e\, n^{n+1/2}\, e^{-n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

2. Оценки снизу.

Лемма 1.

$$C^*_{nk} \geqslant R_{nk} = \frac{k!}{(2k)!}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{k/n} \qquad (1 \leqslant k < n;\ n = 2, 3, \ldots). \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $I = (-\infty, 1)$. Положим

$$f(x) = 0 \quad (x \leqslant 0), \qquad f(x) = x^n\, T_m(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

где $T_m(x) = \cos m \arccos x$ есть многочлен Чебышева степени $m > n$. Ясно, что $f^{(n-1)}(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Оценим сверху

$$M_n = \|f^{(n)}\|_I = \|f^{(n)}\|_{[0,1]} = \max_{x\in[0,1]} |f^{(n)}(x)|.$$

Как хорошо известно,

$$\|T_m^{(k)}\|_{[0,1]} = T_m^{(k)} \leqslant \frac{(m+k)!\, k!\, 2^k}{(m-k)!\,(2k)!} \qquad (0 \leqslant k \leqslant m).$$

Отсюда по формуле Лейбница

$$\|f^{(n)}\|_{[0,1]} \leqslant \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, \|(x^n)^{(n-k)}\|\, \|T_m^{(k)}\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{(m+k)!\,(n!)^2\, 2^k}{(m-k)!\,(n-k)!\,k!\,(2k)!} = \sum_{k=0}^{n} B_k.$$

Но при $k = 0, 1, \ldots, n-1$ и $m \geqslant 2n^3 + n$

$$\frac{B_{k+1}}{B_k} = \frac{(m+k+1)(m-k)(n-k)}{(k+1)^2(2k+1)} \geqslant \frac{m(m-n)}{2n^3} \geqslant m \qquad (n \geqslant 2),$$

откуда

$$\|f^{(n)}\|_I \leqslant \sum_{k=0}^{n} m^{-k}\, B_n < \frac{m}{m-1}\, \frac{(m+n)!\, n!\, 2^n}{(m-n)!\,(2n)!} \qquad (m \geqslant 2n^3+n). \tag{11}$$

Оценим теперь снизу $\|f^{(k)}\|_I$. Так как $(x^n)^{(l)} > 0$ и $T_m^{(l)}(x) > 0$ $(x=1,\ 0 \leqslant l \leqslant n)$, то

$$\|f^{(k)}\|_I \geqslant f^{(k)}(1) \geqslant T_m^{(k)}(1) = T_m^{(k)} = \frac{m(m+k-1)!\, k!\, 2^k}{(m-k)!\,(2k)!}. \tag{12}$$

Переходим к оценке C^*_{nk}. Имеем

$$\|f^{(k)}\|_I \leqslant C^*_{nk}\, \|f\|_I^{1-k/n}\, \|f^{(n)}\|_I^{k/n},$$

откуда в силу (11) и (12)

$$\frac{m(m+k-1)!\, k!\, 2^k}{(m-k)!\,(2k)!} \leqslant C^*_{nk} \left(\frac{m}{m-1}\, \frac{(m+n)!\, n!\, 2^n}{(m-n)!\,(2n)!} \right)^{k/n},$$

т.е.

$$C^*_{nk} \geqslant \frac{m(m+k-1)!}{(m-k)!} \left(\frac{(m-1)(m-n)!}{m(m+n)!} \right)^{k/n} \frac{k!}{(2k)!} \left(\frac{(2n)!}{n!} \right)^{k/n}.$$

Полагая $m \to \infty$, выводим отсюда, что

$$C^*_{nk} \geqslant \frac{k!}{(2k)!} \left(\frac{(2n)!}{n!} \right)^{k/n},$$

и лемма доказана.

Следующая лемма является незначительным уточнением результата В.М. Оловянишникова (7) и устанавливается аналогично.

Лемма 2.

$$C^*_{nk} \geqslant S_{nk} = \frac{(2n!)^{1-k/n}}{(n-k)!} \qquad (1 \leqslant k < n;\ n = 2, 3, \ldots). \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $I = (-\infty, 2^{1/n})$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = -1 \ \ (x \leqslant 0), \qquad f(x) = x^n - 1 \ \ (0 \leqslant x \leqslant 2^{1/n}).$$

Имеем

$$\|f\|_I = 1, \qquad \|f^{(k)}\|_I = \frac{2^{1-k/n} n!}{(n-k)!} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Отсюда, как при доказательстве леммы 1,

$$\frac{2^{1-k/n} n!}{(n-k)!} \leqslant C^*_{nk}\, (n!)^{k/n},$$

т.е.

$$C^*_{nk} \geqslant \frac{(2n!)^{1-k/n}}{(n-k)!},$$

и лемма доказана.

Используя оценки (9), выводим из неравенств (10) и (13), что

$$C^*_{nk} \geqslant a \left(\frac{n}{k} \right)^k \qquad \left(1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2} \right), \tag{14}$$

$$C^*_{nk} \geqslant \frac{1}{e\sqrt{n-k}} \left(\frac{n}{n-k} \right)^{n-k} \qquad \left(\frac{n}{2} \leqslant k < n \right). \tag{15}$$

3. Оценки сверху. Мы будем исходить из оценки А.П. Маторина (4) и займемся ее упрощением. Имеем

$$P_{nk} = \frac{n}{n+k}\, 2^{k/n}\, \frac{(n+k)!\, k!}{(n-k)!\,(2k)!\,(n!)^{k/n}}. \tag{16}$$

Но $2^x \leqslant 1+x \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$. Поэтому

$$P_{nk} \leqslant \frac{(n+k)!\, k!}{(n-k)!\,(2k)!\,(n!)^{k/n}}. \tag{17}$$

Далее, пользуясь неравенствами (9) и учитывая, что

$$n^{1/2-k/(2n)}(n-k)^{-1/2} \leqslant A \qquad (1 \leqslant k < n),$$

выводим

$$P_{nk} \leqslant A\, \frac{(n+k)^{n+k}}{(n-k)^{n-k}\, n^k\, k^k\, 2^{2k}}.$$

Положим $k/n = \gamma$. Тогда

$$P_{nk} \leqslant A\Big(\psi_1(\gamma)\, \frac{n}{4k}\Big)^k, \tag{18}$$

где

$$\psi_1(\gamma) = (1+\gamma)^{1/\gamma-1}\,(1-\gamma)^{-(1/\gamma-1)}.$$

Но имеем

$$\frac{\psi_1'(\gamma)}{\psi_1(\gamma)} = -\gamma^{-2}\Big(\ln\frac{1+\gamma}{1-\gamma} - 2\gamma\Big) < 0.$$

Поэтому

$$\psi_1(\gamma)\ \downarrow, \qquad \psi_1(\gamma) < \psi_1(0) = e^2,$$

и, следовательно,

$$P_{nk} \leqslant A\left(\frac{e^2\, n}{4k}\right)^k \qquad \Big(1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}\Big). \tag{19}$$

Аналогично, полагая $\delta = (n-k)/n$, выводим, что

$$P_{nk} \leqslant A\left(\psi_2(\delta)\, \frac{n}{n-k}\right)^{n-k},$$

где

$$\psi_2(\delta) = 2\Big(1-\frac{\delta}{2}\Big)^{2/\delta-1}(1-\delta)^{-(1/\delta-1)}, \qquad \psi_2(\delta)\downarrow, \quad \psi_2(\delta) < \psi_2(0) = 2.$$

Отсюда

$$P_{nk} \leqslant A\left(\frac{2n}{n-k}\right)^{n-k} \qquad \Big(\frac{n}{2} \leqslant k < n\Big). \tag{20}$$

4. Основные результаты. Объединяя неравенства (14), (16), (4), (19) и (20), убеждаемся, что справедливо следующее предложение.

(I) *Для любого $n \geqslant 2$ выполняются неравенства*

$$a\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqslant C^*_{nk} \leqslant A\left(\frac{e^2\, n}{4k}\right)^k \qquad \Big(1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}\Big), \tag{21}$$

$$\frac{a}{\sqrt{n-k}}\left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k} \leqslant C^*_{nk} \leqslant A\left(\frac{2n}{n-k}\right)^{n-k} \qquad \Big(\frac{n}{2} \leqslant k < n\Big), \tag{22}$$

где A и a — абсолютные положительные константы.

Несколько огрубляя эти оценки, можем написать, что

$$\frac{a}{\sqrt{p}}\left(\frac{n}{p}\right)^p \leqslant C^*_{nk} \leqslant A\left(\frac{2n}{p}\right)^p \qquad (n=2,3,\ldots), \tag{23}$$

где $p=\min\{k,\ n-k\}$. Отсюда

$$\ln C^*_{nk} = p\,\ln\frac{n}{p} + O(p). \tag{24}$$

Если $p=o(n)$, то здесь член $p\,\ln(n/p)$ является главным, и мы получаем для $\ln C^*_{nk}$ асимптотическую формулу. В частности, если $p=O(1)$, то

$$\ln C^*_{nk} = p\ln\frac{n}{p} + O(1),$$

т.е. для любого фиксированного $p=1,2,\ldots$

$$C^*_{nk} \asymp n^p \qquad (n \geqslant 2p). \tag{25}$$

Например, если $k=1$, то согласно (4)

$$C^*_{n,1} \leqslant n^2\left(n!\,2^{n-1}\right)^{-1/n} < \frac{e}{2}\,n,$$

а в силу (10)

$$C^*_{n,1} \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n} = \frac{2}{e}\,n\left(1-o(1)\right).$$

Таким образом,

$$\frac{2}{e}\,n\left(1-o(1)\right) \leqslant C^*_{n,1} \leqslant \frac{e}{2}\,n. \tag{26}$$

Если же $k=n-1$, то согласно (4) и (13)

$$\frac{n}{e} < (2n!)^{1/n} \leqslant C^*_{n,n-1} \leqslant \left(n!\,2^{n-1}\right)^{1/n} < 2(n!)^{1/n} = \frac{2}{e}\,n\left(1+o(1)\right). \tag{27}$$

Определим теперь точный порядок роста $\ln C^*_{nk}$ для всех $n \geqslant 2$ и всех $k<n$.

(II) *Справедлива формула*

$$\ln C^*_{nk} \asymp p\ln\frac{n}{p} \qquad (n\geqslant 2;\ 1\leqslant k<n). \tag{28}$$

Эта формула означает, что существуют абсолютные положительные константы b и B такие, что

$$b\,p\ln\frac{n}{p} \leqslant \ln C^*_{nk} \leqslant B\,p\ln\frac{n}{p} \qquad (n\geqslant 2;\ 1\leqslant k<n). \tag{29}$$

Для оценки $\ln C^*_{nk}$ сверху замечаем, что в силу (24)

$$\ln C^*_{nk} \leqslant p\ln\frac{n}{p} + A\,p \leqslant p\ln\frac{n}{p} + \frac{A}{\ln 2}\,p\ln\frac{n}{p} \leqslant B\,p\ln\frac{n}{p}.$$

Переходим к оценке $\ln C^*_{nk}$ снизу. В силу первого неравенства (23)

$$\ln C^*_{nk} \geqslant p\ln\frac{n}{p} - \frac{1}{2}\ln p - \ln\frac{1}{a}. \tag{30}$$

Но имеем

$$p\ln\frac{n}{p} \geqslant \ln n \qquad \left(1\leqslant p\leqslant\frac{n}{2}\right),$$

откуда
$$\frac{1}{2}\ln p + \ln\frac{1}{a} \leqslant \frac{2}{3}\ln n \leqslant \frac{2}{3}\, p\ln\frac{n}{p},$$
если $n > n_0$. Отсюда и из (30)
$$\ln C^*_{nk} \geqslant \frac{1}{3}\, p\ln\frac{n}{p} \qquad (n > n_0). \tag{31}$$

Пусть теперь $2 \leqslant n \leqslant n_0$. Согласно (6) $C^*_{nk} > 1$. Поэтому
$$\ln C^*_{nk} \geqslant a_1\, p\ln\frac{n}{p} \qquad (2 \leqslant n \leqslant n_0). \tag{32}$$
Сопоставляя (31) и (32), выводим, что
$$\ln C^*_{nk} \geqslant b\, p\ln\frac{n}{p} \qquad (n \geqslant 2;\ 1 \leqslant k < n),$$
где $b = \min\{1/3,\ a_1\}$, и предложение (II) полностью доказано.

Наконец, положим
$$C^*_n = \max_{k=1,\dots,n-1} C^*_{nk}.$$

(III) *Справедливы неравенства*
$$a(\sqrt{2})^n \leqslant C^*_n \leqslant A\, 2^n \qquad (n \geqslant 2), \tag{33}$$
где a и A — абсолютные положительные константы.

В самом деле, полагая в первом неравенстве (21) $k = [n/2]$, убеждаемся, что

$$C_n^* \geqslant a\, 2^{[n/2]} \geqslant a\, 2^{n/2-1} = a\,(\sqrt{2})^n.$$

С другой стороны, в силу второго неравенства (23)

$$C_n^* \leqslant A \max_{p=1,\ldots,[n/2]} \binom{2n}{p}^p \leqslant A \max_{1\leqslant x\leqslant n/2} \binom{2n}{x}^x = A\, 2^n,$$

и утверждение (III) доказано.

Полученные результаты дают самое грубое представление о поведении констант C_{nk}^*. Было бы желательно найти для $\ln C_{nk}^*$ асимптотические формулы, справедливые для $p \asymp n$ при $n \to \infty$, и тем более найти порядок роста C_{nk}^* при $p \to \infty$. По-видимому, для решения этих задач требуется привлекать новые методы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hardy G.H., Littlewood J.E.* Contribution to the arithmetic theory of series // Proc. London Math. Soc. (2). 1912. V. 11. P. 411–478.
2. *Neder L.* Abschätzungen für die Ableitungen einer reellen Funktion eines reellen Arguments // Math. Z. 1930. V. 31. P. 356–365.
3. *Kolmogoroff A.* Une généralisation de l'inegalité de M.J. Hadamard entre les bornes supérieures des dérivées successives d'une fonction // C. r. Acad. sci. 1938. V. 207. P. 764–765.
4. *Колмогоров А.Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Уч. зап. МГУ. Математика. 1939. Т. 30, кн. 3. С. 3–16.
5. *Hadamard J.* Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées // Soc. math. de France, Comptes rendus de Séances. 1914.
6. *Landau E.* Einige Ungleichungen für zweimal differentiierbare Funktionen // Proc. London. Math. soc. (2). 1913. V. 13. P. 43–49.
7. *Маторин А.П.* О неравенствах между наибольшими значениями абсолютных величин функции и ее производных на полупрямой // Укр. мат. ж. 1955. Т. 7. С. 262–266.
8. *Стечкин С.Б.* Неравенства между нормами производных произвольной функции // Acta scient. math. 1965. V. 26. P. 225–230.
9. *Gorny A.* Sur les fonctions indéfiniment dérivables // C. r. Acad. sci. 1938. V. 206. P. 1872–1874.
10. *Gorny A.* Contribution a l'etude des fonctions dérivables d'une variable réelle // Acta Math. 1939. V. 71. P. 317–358.
11. *Cartan H.* Sur les inégalités entre les maxima des dérivées successives d'une fonction // C. r. Acad. sci. 1939. V. 208. P. 414–426.
12. *Cartan H.* Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives // Act. Sci. Ind. № 867. — Paris, 1940.
13. *Любич Ю.И.* О неравенствах между степенями линейного оператора // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1960. Т. 24. С. 825–864.
14. *Оловянишников В.М.* К вопросу о неравенствах между верхними гранями последовательных производных на полупрямой // Успехи матем. наук. 1951. Т. 6, вып. 2(42). С. 167–170.
15. *Стечкин С.Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Матем. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.