НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ [*)]

1. Постановка задачи. Пусть X и Y — банаховы пространства, U — линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор из X в Y с областью определения $D_U \subset X$ и K — некоторый класс элементов из X, содержащийся в D_U.

Многие задачи теории приближений сводятся к изучению уклонения U от фиксированного (как правило, ограниченного) линейного оператора S из X в Y на заданном классе K, т.е. к исследованию величины

$$R(U, S;\, K) = \sup_{x \in K} \|Ux - Sx\|_Y. \tag{1}$$

Сюда относится, в частности, задача оценки погрешности различных формул численного дифференцирования для тех или иных классов функций K; см., например, [1]. Полученные в этом направлении результаты показывают, что даже неограниченные операторы могут хорошо приближаться ограниченными операторами на достаточно узких и надлежащим образом нормированных классах K.

В настоящей работе рассматривается задача о *наилучшем* приближении оператора U всевозможными линейными операторами S с нормой, не превосходящей числа $N > 0$, на заданном классе K: найти

$$E_N(U;\, K) = \inf_{\|S\| \leqslant N} R(U, S;\, K) = \inf_{\|S\| \leqslant N} \sup_{x \in K} \|Ux - Sx\|_Y, \tag{2}$$

где $\|S\|$ есть норма S, как оператора из X в Y.

Эта задача нетривиальна лишь в том случае, если $\|U\| > N$ и существует линейный оператор S, $\|S\| \leqslant N$, для которого $R(U, S;\, K) < \infty$. Здесь возникает обычный для теории приближений вопрос исследования поведения наилучших приближений как функции от N, а также вопросы существования, единственности, характеристических свойств и построения наилучшего оператора S^*.

Один из наиболее важных частных случаев задачи (2) состоит в том, что класс K определяется при помощи некоторого линейного оператора. Пусть Z есть банахово пространство и V — линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор из X в Z с областью определения $D_V \subset X$ и притом такой, что $D_V \subset D_U$. Тогда полагаем

$$K = \{x \in X :\ \|Vx\|_Z \leqslant 1\}$$

и вместо $E_N(U; K)$ будем писать

$$E_N(U, V) = \inf_{\|S\| \leqslant N} \sup_{\|Vx\|_Z \leqslant 1} \|Ux - Sx\|_Y. \tag{3}$$

Ясно, что если для оператора S

$$\sup_{\|Vx\| \leqslant 1} \|Ux - Sx\| < \infty,$$

то $Sx = Ux$ для всех $x \in D_V$, для которых Vx обращается в нуль, т.е. S интерполирует U на ядре оператора V. В такой форме задача тесно связана с изучением свойств пары операторов (U, V), в частности с неравенствами между нормами производных (см. [2]).

*) Матем. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.

Некоторые результаты этой работы докладывались на Всесоюзной конференции по вычислительной математике в Москве в январе 1965 г., а также формулировались в сообщении В.В. Арестова на Международном конгрессе математиков в Москве (см. [3]).

2. Оценка $E_n(U;\,K)$ снизу. Положим

$$\Phi(M) = \Phi(M;\,U;\,K) = \sup_{\substack{x\in K\\ \|x\|\leqslant M}} \|Ux\| \qquad (M \geqslant 0). \tag{4}$$

Эта характеристика тесно связана с наилучшими приближениями $E_N(U;\,K)$. Покажем, что $E_N(U;\,K)$ можно оценить снизу через функцию $\Phi(M)$.

Имеем для любого $N \geqslant 0$

$$E_N(U;\,K) = \inf_{\|S\|\leqslant N} \sup_{x\in K} \|Ux - Sx\| \geqslant$$
$$\geqslant \inf_{\|S\|\leqslant N} \sup_{x\in K} \bigl\{\|Ux\| - \|Sx\|\bigr\} \geqslant \sup_{x\in K} \bigl\{\|Ux\| - N\,\|x\|\bigr\}.$$

Поэтому для любых $M \geqslant 0$ и $N \geqslant 0$

$$E_N(U;\,K) \geqslant \sup_{\substack{x\in K\\ \|x\|\leqslant M}} \bigl\{\|Ux\| - N\,\|x\|\bigr\} \geqslant \Phi(M) - NM. \tag{5}$$

Отсюда вытекает, что

$$E_N(U;\,K) \geqslant \sup_{M\geqslant 0} \bigl\{\Phi(M) - NM\bigr\}, \tag{6}$$

$$\Phi(M) \leqslant \inf_{N\geqslant 0} \bigl\{E_N(U;\,K) + NM\bigr\}. \tag{7}$$

Пусть, в частности,

$$\Phi(u) \geqslant \varphi(u) \qquad (u \geqslant 0),$$

где действительная функция $\varphi(u)$ определена и непрерывна на $[0, +\infty)$ и удовлетворяет условиям $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u)\uparrow$, $\varphi'(u)\downarrow$. Тогда для любого $M \geqslant 0$ имеем

$$E_N(U;\,K) \geqslant \varphi(M) - NM.$$

Правая часть этого неравенства максимальна при $\varphi'(M) = N$. Отсюда следует, что

$$E_{\varphi'(M)}(U;\,K) \geqslant \varphi(M) - M\,\varphi'(M) \qquad (M > 0). \tag{8}$$

В ряде случаев неравенство (5) на самом деле обращается в равенство. Например, это имеет место, если найдутся элемент $x^* \in K$ и линейный оператор S^* такие, что

$$\begin{gathered} \|x^*\| = M, \quad \|Ux^*\| = \Phi(M), \quad \|S^*\| = N\bigl(= \Phi'(M)\bigr), \\ \|S^*x^*\| = NM, \quad \|Ux^* - S^*x^*\| = \Phi(M) - NM. \end{gathered} \tag{9}$$

В излагаемых ниже примерах наилучший оператор S^* был найден исходя из этих условий.

Пусть

$$\varphi(u) = C\,u^{\alpha/(1+\alpha)} \qquad (\alpha > 0).$$

Проведя элементарный подсчет, убеждаемся, что

$$\Phi(M) \geqslant C\,M^{\alpha/(1+\alpha)} \;\; (M > 0) \Rightarrow E_N(U;\,K) \geqslant B\,N^{-\alpha} \;\; (N > 0), \tag{10}$$

$$E_N(U;\,K) = B\,N^{-\alpha} \;\; (N > 0) \Rightarrow \Phi(M) \leqslant C\,M^{\alpha/(1+\alpha)} \;\; (M > 0), \tag{11}$$

где B и C связаны соотношением

$$B = \frac{\alpha^\alpha}{(1+\alpha)^{1+\alpha}}\, C^{1+\alpha}. \tag{12}$$

3. Простейший пример. Пусть X есть пространство непрерывных функций $C[-a,a]$ $(0 < a \leqslant \infty)$, Y — числовая прямая, $\omega(\delta)$ $(0 \leqslant \delta < 2a)$ — вогнутый модуль непрерывности, $H[\omega]$ — класс непрерывных функций, для которых $\omega(\delta, x) \leqslant \omega(\delta)$ $(0 \leqslant \delta < 2a)$,

$$K = C[-a,a] \cap H[\omega],$$

U — линейный (вообще говоря, неограниченный) функционал вида

$$Ux = \int_0^a \bigl(x(t) - x(-t)\bigr)\, f(t)\, dt, \tag{13}$$

где $f(t) \geqslant 0$ $(0 \leqslant t < a)$ и для любого $h \in (0,a)$

$$\int_0^h \omega(2t)\, f(t)\, dt < \infty \qquad \text{и} \qquad \int_h^a f(t)\, dt < \infty. \tag{14}$$

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$E_N(U;\, K) = \int_0^h \omega(2t)\, f(t)\, dt, \tag{15}$$

где

$$N = 2\int_h^a f(t)\, dt \qquad (0 < h < a). \tag{16}$$

Доказательство. Положим $2M = \omega(2h)$ и подсчитаем $\Phi(M)$. Имеем

$$\Phi(M) \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant M} \int_h^a \bigl(x(t) - x(-t)\bigr)\, f(t)\, dt + \sup_{x \in H[\omega]} \int_0^h \bigl(x(t) - x(-t)\bigr)\, f(t)\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \omega(2h) \int_h^a f(t)\, dt + \int_0^h \omega(2t)\, f(t)\, dt.$$

Так как соответствующая экстремальная функция

$$x(t) = \omega(2t)/2 \qquad (0 \leqslant t \leqslant h),$$
$$x(t) = \omega(2h)/2 \qquad (h \leqslant t \leqslant a),$$
$$x(-t) = -x(t)$$

принадлежит классу $H[\omega]$ и удовлетворяет условию $\|x\| = M$, то

$$\Phi(M) = \int_0^h \omega(2t)\, f(t)\, dt + \omega(2h) \int_h^a f(t)\, dt.$$

Далее, положим

$$N = 2\int_h^a f(t)\, dt$$

и оценим $E_N(U;\, K)$ снизу. Имеем в силу (5)

$$E_N(U;\, K) \geqslant \Phi(M) - NM = \int_0^h \omega(2t)\, f(t)\, dt. \tag{17}$$

Переходим к оценке $E_N(U;\,K)$ сверху. Для этого положим
$$S^*x=\int_h^a \big(x(t)-x(-t)\big)\,f(t)\,dt.$$
Имеем
$$\|S^*\|=2\int_h^a f(t)\,dt=N,$$
$$Ux-S^*x=\int_0^h \big(x(t)-x(-t)\big)\,f(t)\,dt,$$
$$\sup_{x\in H[\omega]}|Ux-S^*x|=\int_0^h \omega(2t)\,f(t)\,dt,$$
откуда
$$E_N(U;\,K)\leqslant\int_0^h \omega(2t)\,f(t)\,dt. \tag{18}$$
Сопоставляя (17) и (18), выводим (15) для
$$N=2\int_h^a f(t)\,dt,$$
и теорема доказана.

Из доказательства видно, что эта теорема остается справедливой и в том случае, когда под K понимается весь класс $H[\omega]$.

4. Наилучшее приближение операторов дифференцирования. Пусть I есть действительная прямая или полупрямая $[0,+\infty)$, $X=Y=C(I)$ — пространство непрерывных функций, определенных на I, K_n — класс функций, для которых $(n-1)$-я производная $x^{(n-1)}(t)$ имеет производные числа, не превосходящие 1, и $U=D^k$ — оператор дифференцирования k-го порядка $(1\leqslant k<n)$.

Рассмотрим следующий частный случай задачи (3): найти
$$E_N(k,n)_{C(I)}=\inf_{\|S\|\leqslant N}\ \sup_{\substack{x\in X\\ x\in K_n}}\|x^{(k)}-Sx\|_{C(I)}\qquad(1\leqslant k<n;\ N>0). \tag{19}$$

Наряду с этой задачей естественно рассмотреть задачу о нахождении величины
$$E_N(D^k;\,K_n)_{C(I)}=\inf_{\||S\||\leqslant N}\ \sup_{x\in K_n}\|x^{(k)}-Sx\|_{C(I)}, \tag{20}$$

где S — линейный оператор, определенный на объединении $C(I)$ и K_n и ограниченный как оператор из $C(I)$ в $C(I)$. Ясно, что
$$E_N(k,n)_{C(I)}\leqslant E_N(D^k;\,K_n)_{C(I)}. \tag{21}$$
Во всех случаях, когда сосчитаны обе эти характеристики, они совпадают.

Теорема 2. *Для любых $k=1,2,\dots,n-1$; $n=2,3,\dots$ справедливы равенства*
$$\begin{gathered}E_N(k,n)_{C(I)}=C_{k,n}(I)\,N^{-(n-k)/k},\\ E_N(D^k;K_n)_{C(I)}=C'_{k,n}(I)\,N^{-(n-k)/k}\qquad(N>0).\end{gathered} \tag{22}$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что класс K_n переходит в себя при замене $x(t)$ на $r^{-n}\,x(rt)$, а норма не меняется при замене t на $rt=u$. Получаем

$$\sup_{x\in K_n}\|x^{(k)}(t)-Sx(t)\|=\sup_{x\in K_n}\|r^{k-n}\,x^{(k)}(rt)-r^{-n}\,Sx(rt)\|=$$
$$=r^{k-n}\sup_{x\in K_n}\|x^{(k)}(rt)-r^{-k}\,Sx(rt)\|=r^{k-n}\sup_{x\in K_n}\|x^{(k)}(u)-r^{-k}\,S_1x(u)\|,$$

и если S пробегает всевозможные линейные операторы с нормой $\leqslant N$, то и S_1 пробегает все такие операторы. Поэтому

$$E_N(D^k;\,K_n)_{C(I)}=\inf_{\|S\|\leqslant N}\sup_{x\in K_n}\|x^{(k)}(t)-Sx(t)\|=$$
$$=r^{k-n}\inf_{\|S_1\|\leqslant N}\sup_{x\in K_n}\|x^{(k)}(u)-r^{-k}\,S_1x(u)\|=$$
$$=r^{k-n}\inf_{\|S_2\|\leqslant r^{-k}\,N}\sup_{x\in K_n}\|x^{(k)}(u)-S_2x(u)\|=r^{k-n}\,E_{r^{-k}N}(D^k;\,K_n)_{C(I)}.$$

Таким образом,

$$E_N(D^k;\,K_n)_{C(I)}=r^{k-n}\,E_{r^{-k}N}(D^k;\,K_n)_{C(I)},$$

откуда, полагая $r^k=N$, получаем

$$E_N(D^k;\,K_n)_{C(I)}=C'_{k,n}(I)\,N^{-(n-k)/k}\qquad(N>0).$$

В точности так же устанавливается, что

$$E_N(k,n)_{C(I)}=C_{k,n}(I)\,N^{-(n-k)/k}\qquad(N>0),$$

и теорема доказана.

Отметим, что аналогичное предложение справедливо для пространств $L_p(I)$ $(p\geqslant 1)$, а также для классов $K_{n-1+\alpha}$, характеризуемых тем, что

$$\|x^{(n-1)}(t+h)-x^{(n-1)}(t)\|\leqslant h^{\alpha}\qquad(0<\alpha\leqslant 1,\ h\geqslant 0).$$

Доказательство не меняется.

Теорема 2 ничего не говорит о значениях констант $C_{n,k}(I)$. В общем случае для них могут быть получены оценки снизу. А.Н. Колмогоров [4] доказал, что

$$\Phi(M;\,D^k;\,K_n)_{C(-\infty,+\infty)}=\sup_{\|x\|\leqslant M,\,\|x^{(n)}\|\leqslant 1}\|x^{(k)}\|_{C(-\infty,+\infty)}=K_{k,n}\,M^{(n-k)/n},\quad(23)$$

и нашел значения соответствующих констант $K_{k,n}$ для всех $k=1,2,\ldots,n-1$ и всех $n=2,3\ldots$ Отсюда и из (10) непосредственно вытекает, что

$$C^k_{k,n}(-\infty,+\infty)\geqslant\left(\frac{k}{n}\right)^k\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-k}K^n_{k,n}.\qquad(24)$$

В частности,

$$C_{1,2}(-\infty,+\infty)\geqslant 1/2,\quad C_{1,3}(-\infty,+\infty)\geqslant 1/6,\quad C_{2,3}(-\infty,+\infty)\geqslant 2/3.\qquad(25)$$

Я предполагаю, что неравенство (24) всегда обращается в равенство.

Далее, очевидно, всегда

$$C_{k,n}[0,+\infty)\geqslant C_{k,n}(-\infty,+\infty).$$

Кроме того, как известно (см. [2]),

$$\Phi(M;\,D;\,K_2)_{C[0,+\infty)}\geqslant 2M,$$
$$\Phi(M;\,D;\,K_3)_{C[0,+\infty)}\geqslant 3^{5/3}\,M^{2/3}/2,$$
$$\Phi(M;\,D^2;\,K_3)_{C[0,+\infty)}\geqslant 2\cdot 3^{1/3}\,M^{1/3},$$

откуда, как и выше,

$$C_{1,2}[0,+\infty) \geqslant 1, \quad C_{1,3}[0,+\infty) \geqslant 9/2, \quad C_{2,3}[0,+\infty) \geqslant 4\sqrt{2}/3. \tag{26}$$

Для оценки $C'_{k,n}(I)$ сверху следует построить достаточно хороший приближающий оператор S. Например, полагая

$$Sx = S_{k,n}x = h^{-k}\sum_{k=0}^{n-1} a_k\, x(t+kh),$$

где коэффициенты подобраны так, чтобы

$$x^{(k)} - Sx = h^{-k}\int_0^{nh} \varkappa(u,h)\, x^{(n)}(t+u)\, du,$$

убеждаемся, что

$$C'_{k,n}(I) < \infty \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1;\ n = 2, 3, \ldots).$$

Для $n = 2$ и $n = 3$ я нашел соответствующие наилучшие операторы $S^* = S^*_{k,n}(N;\, I)$. Все они имеют конечноразностный характер.

Теорема 3. *Пусть $X = Y = C[0,+\infty)$, $\omega(\delta)$ $(0 \leqslant \delta < \infty)$ — произвольный модуль непрерывности и $H'[\omega]$ — класс функций, для которых $\omega(\delta, x') \leqslant \omega(\delta)$ $(0 \leqslant \delta < \infty)$. Тогда*

$$E_N(D;\, H'[\omega])_{C[0,+\infty)} = \frac{N}{2}\int_0^{2/N} \omega(t)\, dt \qquad (N > 0). \tag{27}$$

Доказательство. Положим

$$M = \frac{1}{2}\int_0^h \big(\omega(h) - \omega(t)\big)\, dt \qquad (h > 0)$$

и рассмотрим функцию

$$x_0(t) = \int_0^t \big(\omega(h) - \omega(u)\big)\, du - M \qquad (0 \leqslant t \leqslant h),$$
$$x_0(t) = M \qquad (t \geqslant h).$$

Для этой функции имеем

$$\|x_0\| \leqslant M, \quad x_0'(t) = \omega(h) - \omega(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant h),$$
$$x_0'(t) = 0 \qquad (t \geqslant h).$$

Отсюда $x_0 \in H'[\omega]$ и $\|x_0'\| = \omega(h)$. Поэтому

$$\Phi(M;\, D;\, H'[\omega]) \geqslant \|x_0'\| = \omega(h). \tag{28}$$

Далее, положим $N = 2/h$ и воспользуемся неравенством (5). Учитывая оценку (28), выводим, что

$$E_N(D;\, H'[\omega])_{C[0,+\infty)} \geqslant \omega(h) - \frac{1}{h}\int_0^h \big(\omega(h) - \omega(t)\big)\, dt =$$
$$= \frac{1}{h}\int_0^h \omega(t)\, dt = \frac{N}{2}\int_0^{2/N} \omega(t)\, dt. \tag{29}$$

С другой стороны, полагая

$$S^*x = \frac{1}{h}\bigl(x(t+h) - x(t)\bigr),$$

убеждаемся, что

$$\|S^*\| = \frac{2}{h} = N \quad \text{и} \quad x' - S^*x = \frac{1}{h}\int_0^h \bigl(x'(t) - x'(t+u)\bigr)\,du,$$

откуда

$$E_N(D;\, H'[\omega])_{C[0,+\infty)} \leqslant \sup_{x\in H'[\omega]} \|x' - S^*x\| \leqslant \frac{1}{h}\int_0^h \omega(t)\,dt = \frac{N}{2}\int_0^{2/N} \omega(t)\,dt. \quad (30)$$

Сравнивая (29) и (30), находим, что

$$E_N(D;\, H'[\omega])_{C[0,+\infty)} = \frac{N}{2}\int_0^{2/N} \omega(t)\,dt \qquad (N > 0),$$

и теорема доказана.

Следствие. *При тех же предположениях*

$$\Phi\left(\frac{1}{2}\int_0^h \bigl(\omega(h) - \omega(u)\bigr)\,du\right) = \omega(h) \qquad (h > 0). \quad (31)$$

В самом деле, оценка $\Phi(M)$ снизу дается неравенством (28), а оценка сверху вытекает из (5) и (29).

В частности, если $\omega(\delta) = \delta$, то класс $H'[\omega]$ обращается в класс K_2. Поэтому справедливо равенство

$$E_N(D;\, K_2)_{C[0,+\infty)} = 1/N \qquad (N > 0), \quad (32)$$

а отсюда с учетом (21) и (26) непосредственно следует, что

$$E_N(1,2)_{C[0,+\infty)} = 1/N \qquad (N > 0). \quad (33)$$

Совершенно аналогично в случае $X = Y = C(-\infty,+\infty)$, полагая

$$S^*x = \frac{1}{2h}\bigl(x(t+h) - x(t-h)\bigr),$$

убеждаемся, что

$$E_N(D;\, H'[\omega])_{C(-\infty,+\infty)} = N\int_0^{1/N} \omega(t)\,dt \qquad (N > 0) \quad (34)$$

$$\Phi\left(\int_0^h \bigl(\omega(h) - \omega(u)\bigr)\,du\right) = \omega(h) \qquad (h > 0). \quad (35)$$

В частности,

$$E_N(1,2)_{C(-\infty,+\infty)} = E_N(D;\, K_2)_{C(-\infty,+\infty)} = 1/(2N) \qquad (N > 0). \quad (36)$$

Для случая $n = 3$, $I = [0,+\infty)$ ограниченные операторы, наилучшим образом приближающие x' и x'', имеют вид (см. [2])

$$S_{1,3}x = \frac{1}{6h}\bigl(-8x(t) + 9x(t+h) - x(t+3h)\bigr),$$
$$S_{2,3}x = \frac{1}{3h^2}\bigl(2x(t) - 3x(t+h) + x(t+3h)\bigr).$$

Они обладают следующими свойствами:

$$\|S_{1,3}\| = \frac{3}{h}, \qquad \|x' - S_{1,3}x\| = \frac{1}{12h}\left\| 9\int_0^h (h-u)^2\, x'''(t+u)\, du - \right.$$
$$\left. - \int_0^{3h} (3h-u)^2\, x'''(t+u)\, du \right\| \leqslant \frac{h^2}{2}\, \|x'''\|,$$
$$\|S_{2,3}\| = \frac{2}{h^2}, \qquad \|x'' - S_{2,3}x\| = \frac{1}{6h^2}\left\| 3\int_0^h (h-u)^2\, x'''(t+u)\, du - \right.$$
$$\left. - \int_0^{3h} (3h-u)^2\, x'''(t+u)\, du \right\| \leqslant \frac{4h}{3}\, \|x'''\|.$$

Отсюда

$$E_N(D;\, K_3)_{C[0,+\infty)} \leqslant \frac{9}{2N^2}, \qquad E_N(D^2;\, K_3)_{C[0,+\infty)} \leqslant \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{N}}.$$

Эти оценки в соединении с (26) показывают, что

$$E_N(1,3)_{C[0,+\infty)} = E_N(D;\, K_3)_{C[0,+\infty)} = \frac{9}{2N^2}, \tag{37}$$

$$E_N(2,3)_{C[0,+\infty)} = E_N(D^2;\, K_3)_{C[0,+\infty)} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{N}}. \tag{38}$$

Точно так же в случае $n = 3$, $I = (-\infty, +\infty)$ имеем

$$S_{1,3}x = \frac{1}{2h}\big(x(t+h) - x(t-h)\big),$$
$$S_{2,3}x = \frac{1}{h^2}\big(x(t+h) - 2x(t) + x(t-h)\big),$$

откуда, аналогично,

$$\|S_{1,3}\| = \frac{1}{h}, \qquad \|\, x' - S_{1,3}x\| \leqslant \frac{h^2}{6}\, \|x'''\|,$$
$$\|S_{2,3}\| = \frac{4}{h^2}, \qquad \|\, x'' - S_{2,3}x\| \leqslant \frac{h}{3}\, \|x'''\|.$$

Учитывая оценки (25), выводим отсюда, что

$$E_N(1,3)_{C(-\infty,+\infty)} = E_N(D;\, K_3)_{C(-\infty,+\infty)} = \frac{1}{6N^2}, \tag{39}$$

$$E_N(2,3)_{C(-\infty,+\infty)} = E_N(D^2;\, K_3)_{C(-\infty,+\infty)} = \frac{2}{3\sqrt{N}}. \tag{40}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sard A.* Linear approximation // Math. Surveys. Providence. 1963. № 9.
2. *Стечкин С.Б.* Неравенства между нормами производных произвольной функции // Acta Scient. Math. 1965. V. 26. P. 225–230.
3. *Арестов В.В.* Наилучшие приближения операторов дифференцирования // ICM: Тезисы кратких научных сообщений. Секция 4. — М., 1966. — С. 31–32.
4. *Колмогоров А.Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Уч. зап. МГУ. Математика. 1939. Т. 30, кн. 3. С. 3–16.