

НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ НОРМАМИ ПРОИЗВОДНЫХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦИИ *)

Пусть $I = (-\infty, +\infty)$ или $I = [0, +\infty)$, действительная функция $f(x)$ задана и ограничена на I и имеет $(n - 1)$ -ю производную, удовлетворяющую условию Липшица. Положим

$$M_k(f) = \sup_{x \in I} |f^{(k)}(x)| \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

причем для $k = n$ последнее выражение понимается как верхняя грань производных чисел функции $f^{(n-1)}(x)$.

Неравенства вида

$$M_k(f) \leq C_{n,k} M_0^{(n-k)/n}(f) M_n^{k/n}(f), \quad (1)$$

связывающие величины $M_0(f)$, $M_k(f)$ и $M_n(f)$, мы будем называть *неравенствами Колмогорова*. А.Н. Колмогоров [1] для случая $I = (-\infty, +\infty)$ нашел наилучшее значение $C_{n,k}$ в этих неравенствах при всех n и k . В случае $I = [0, +\infty)$ известные результаты (Картан, Горный) не являются окончательными. Для нескольких частных значений n и k наилучшие константы были известны и раньше.

Пусть, далее, $p \geq 1$,

$$\|f\|_p = \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

и если в неравенстве фигурирует $\|f^{(n)}\|$, то предполагается, что функция $f^{(n-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на любом конечном отрезке $[a, b] \subset I$. Харди, Литтлвуд и Поля [2] отмечают (без доказательства), что для любого $p \geq 1$ справедливо неравенство

$$\|f'\|_p \leq C_{2,1}(p) \|f\|_p^{1/2} \|f''\|_p^{1/2}. \quad (2)$$

Наилучшие значения $C_{2,1}(p)$ известны при $p = \infty$, $p = 2$ и $p = 1$ и сведены в таблицу, а аналог неравенства (1) для всех $p \geq 1$ и всех натуральных n доказан Штейном [3].

*) Acta Sci. Math. 1965. Т. 26, Ф. 3-4. Р. 225-230.

f	$I = (-\infty, +\infty)$	$I = [0, +\infty)$	Авторы
$p = \infty, \quad \ f\ = \sup_{x \in I} f(x) $			
f любого знака	$\sqrt{2}$	2	Ландау, Адамар
$f(x) \geq 0$	1	$\sqrt{2}$	Оловянишников
$p = 2, \quad \ f\ = (\int_I f(x) ^2 dx)^{1/2}$			
f любого знака	1	$\sqrt{2}$	Харди, Литтлвуд и Поля
$f(x) \geq 0$?	?	—
$p = 1, \quad \ f\ = \int_I f(x) dx$			
f любого знака	$\sqrt{2}$?	Штейн
$f(x) \geq 0$	1	$\sqrt{2}$	Новые случаи

Цель настоящей работы — перенести неравенства Колмогорова на абстрактные функции. Пусть K есть линейное нормированное пространство функций $f(x)$, заданных на I и принимающих значения в некотором (действительном или комплексном) банаховом пространстве H . Изучаются неравенства, связывающие нормы функции и ее производных для $f \in K$. При этом если в некотором неравенстве фигурирует $f^{(n)}(x)$, то предполагается, что для $f(x)$ справедлива формула Тейлора с остаточным членом n -го порядка в интегральной форме.

ТЕОРЕМА. Пусть для любого t $\|f(x+t)\| = \|f(x)\|$ ($I = (-\infty, +\infty)$) или для любого $h \geq 0$ $\|f(x+h)\| \leq \|f(x)\|$ ($I = [0, +\infty)$). Тогда

$$\|f^{(k)}\| \leq C_{n,k} \|f\|^{(n-k)/n} \|f^{(n)}\|^{k/n} \quad (1 \leq k \leq n-1). \quad (3)$$

При этом можно положить

$$C_{n,k} = (k+1) \left(\frac{n-1}{k} \right)^{k \ln n} \leq n^{n-k}.$$

В частности, справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \|f'\| &\leq \sqrt{2} \|f\|^{1/2} \|f''\|^{1/2} && \text{при } I = (-\infty, +\infty), \\ \|f'\| &\leq 2 \|f\|^{1/2} \|f''\|^{1/2} && \text{при } I = [0, +\infty), \\ \|f'\| &\leq \frac{1}{2} 3^{2/3} \|f\|^{2/3} \|f'''\|^{1/3} && \text{при } I = (-\infty, +\infty), \\ \|f'\| &\leq \frac{1}{2} 3^{5/3} \|f\|^{2/3} \|f'''\|^{1/3} && \text{при } I = [0, +\infty), \quad (*) \\ \|f''\| &\leq 3^{1/3} \|f\|^{1/3} \|f'''\|^{2/3} && \text{при } I = (-\infty, +\infty), \\ \|f''\| &\leq 2 \cdot 3^{1/3} \|f\|^{1/3} \|f'''\|^{2/3} && \text{при } I = [0, +\infty). \quad (*) \end{aligned}$$

Если I есть действительная прямая и $f(x) \geq 0$, то в правых частях этих неравенств f надо заменить на $f/2$. Неравенства, отмеченные (*), представляются

новыми. Константы в неравенствах для $n = 2$ и $n = 3$ являются наилучшими и достигаются, например, для классического случая, когда $\|f\| = \sup_{x \in I} |f(x)|$.

Метод доказательства, которым я пользуюсь, отличен от метода А.Н. Колмогорова и основан на рассмотрении линейных неравенств, связывающих $\|f\|$, $\|f^{(k)}\|$ и $\|f^{(n)}\|$ и эквивалентных (3).

ЛЕММА 1. Пусть $A > 0$, $B > 0$,

$$C = n \left(\frac{A}{n-k} \right)^{(n-k)/n} \left(\frac{B}{k} \right)^{k/n}.$$

Тогда утверждения

$$\|f^{(k)}\| \leq A h^{-k} \|f\| + B h^{n-k} \|f^{(n)}\| \quad \text{для любого } h > 0 \quad (4)$$

и

$$\|f^{(k)}\| \leq C \|f\|^{(n-k)/n} \|f^{(n)}\|^{k/n} \quad (5)$$

эквивалентны.

В самом деле, минимизируя неравенство (4) по h , получаем (5). С другой стороны, применяя к (5) неравенство Юнга, выводим (4).

Теперь задача сводится к доказательству неравенства вида (4). Для этого я пользуюсь аппроксимативными соображениями. Пусть $h > 0$ и линейный оператор $S_h(f)$, отображающий K в K , приближает $f^{(k)}(x)$ и обладает следующими свойствами:

- 1) $\|S_h(f)\| \leq A h^{-k} \|f\|$,
- 2) $\|f^{(k)} - S_h(f)\| \leq B h^{n-k} \|f^{(n)}\|$.

Тогда

$$\|f^{(k)}\| \leq \|S_h(f)\| + \|f^{(k)} - S_h(f)\| \leq A h^{-k} \|f\| + B h^{n-k} \|f^{(n)}\|,$$

т.е. справедливо неравенство (4). Выбирая надлежащим образом оператор $S_h(f)$, получаем все сформулированные выше утверждения.

ЛЕММА 2. Пусть $I = [0, +\infty)$ и пространство K удовлетворяет условию: для любого $h \geq 0$

$$\|f(x+h)\| \leq \|f(x)\|. \quad (6)$$

Тогда

$$\|f^{(n-1)}\| \leq n \|f\|^{1/n} \|f^{(n)}\|^{(n-1)/n} \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (7)$$

Доказательство. Положим

$$\begin{aligned} S(f) &= S_{n-1, h}(f) = h^{-n+1} \Delta_h^{n-1} f(x) = h^{-n+1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} C_{n-1}^k f(x+kh) = \\ &= h^{-n+1} \int_0^h \dots \int_0^h f^{(n-1)}(x+t_1+\dots+t_{n-1}) dt_1 \dots dt_{n-1} \quad (h > 0). \end{aligned}$$

Используя условие (6), находим, что

$$\|S(f)\| \leq h^{-n+1} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \|f(x+kh)\| \leq h^{-n+1} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \|f(x)\| = \left(\frac{2}{h} \right)^{n-1} \|f\|.$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} f^{(n-1)}(x) - S(f) &= \\ &= h^{-n+1} \int_0^h \dots \int_0^h (f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x + t_1 + \dots + t_{n-1})) dt_1 \dots dt_{n-1}, \end{aligned}$$

откуда по неравенству Минковского

$$\begin{aligned} \|f^{(n-1)}(x) - S(f)\| &\leq \\ &\leq h^{-n+1} \int_0^h \dots \int_0^h \|f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x + t_1 + \dots + t_{n-1})\| dt_1 \dots dt_{n-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Но при $t \geq 0$

$$f^{(n-1)}(x+t) - f^{(n-1)}(x) = \int_0^t f^{(n)}(x+u) du$$

и в силу (6)

$$\|f^{(n-1)}(x+t) - f^{(n-1)}(x)\| \leq \int_0^t \|f^{(n)}(x+u)\| du \leq t \|f^{(n)}(x)\|.$$

Подставляя эту оценку в неравенство (8), получаем

$$\begin{aligned} \|f^{(n-1)}(x) - S(f)\| &\leq h^{-n+1} \int_0^h \dots \int_0^h (t_1 + \dots + t_{n-1}) dt_1 \dots dt_{n-1} \|f^{(n)}\| = \\ &= (n-1)h^{-n+1} \int_0^h \dots \int_0^h t_1 dt_1 \dots dt_{n-1} \|f^{(n)}\| = (n-1) \frac{h}{2} \|f^{(n)}\|. \end{aligned}$$

Из этих оценок вытекает, что

$$\|f^{(n-1)}\| \leq \left(\frac{2}{h}\right)^{n-1} \|f\| + (n-1) \frac{h}{2} \|f^{(n)}\|,$$

а отсюда согласно лемме 1 следует (7), и лемма 2 доказана.

Очевидно, эта лемма остается справедливой и в том случае, когда $I = (-\infty, +\infty)$ и для всех t $\|f(x+t)\| = \|f(x)\|$.

Теперь для завершения доказательства теоремы остается провести индукцию.

ЛЕММА 3. Пусть $M_k \geq 0$ и

$$M_{n-1} \leq C_n M_0^{1/n} M_n^{(n-1)/n} \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (9)$$

Тогда

$$M_k \leq C_{n,k} M_0^{(n-k)/n} M_n^{k/n} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1; \quad n = 2, 3, \dots), \quad (10)$$

где

$$C_{n,k}^{1/k} = \prod_{p=k}^{n-1} C_{p+1}^{1/p}. \quad (11)$$

Для $n = 2$ утверждения (9) и (10) совпадают. Пусть для некоторого $n \geq 2$ уже установлено, что

$$M_k \leq C_{n,k} M_0^{(n-k)/n} M_n^{k/n}, \quad (12)$$

где $C_{n,k}$ имеет вид (11). Используя неравенство (9) с заменой n на $n+1$, имеем

$$M_n \leq C_{n+1} M_0^{1/(n+1)} M_{n+1}^{n/(n+1)}.$$

Подставляя это неравенство в (12), получаем

$$M_k \leq C_{n,k} C_{n+1}^{k/n} M_0^{(n+1-k)/(n+1)} M_{n+1}^{k/(n+1)}.$$

Таким образом, можно положить

$$C_{n+1,k} = C_{n,k} C_{n+1}^{k/n},$$

откуда

$$C_{n+1,k}^{1/k} = C_{n,k}^{1/k} C_{n+1}^{1/n} = \prod_{p=k}^{n-1} C_{p+1}^{1/p} C_{n+1}^{1/n} = \prod_{p=k}^n C_{p+1}^{1/p},$$

и лемма доказана.

В интересующем нас случае $C_n = n$. Поэтому в неравенстве (3) можно положить

$$C_{n,k} = \exp \left\{ k \sum_{p=k}^{n-1} \frac{1}{p} \ln(p+1) \right\}.$$

Оценим это выражение. Имеем

$$\sum_{p=k}^{n-1} \frac{1}{p} \ln(p+1) = \frac{1}{k} \ln(k+1) + \sum_{p=k+1}^{n-1} \frac{1}{p} \ln(p+1) \leq \frac{1}{k} \ln(k+1) + \ln \frac{n-1}{k} \ln n.$$

Отсюда

$$C_{n,k} \leq \exp \left\{ \ln(k+1) + k \ln \frac{n-1}{k} \ln n \right\} = (k+1) \left(\frac{n-1}{k} \right)^{k \ln n},$$

и теорема доказана.

В заключение заметим, что для доказательства неравенств (*) следует соответственно положить

$$S_h(f) = \frac{1}{6h} (-8f(x) + 9f(x+h) - f(x+3h)) \quad (k=1),$$

$$S_h(f) = \frac{1}{3h^2} (2f(x) - 3f(x+h) + f(x+3h)) \quad (k=2).$$

Эти формулы являются наилучшими формулами численного дифференцирования для $n=3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А.Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Ученые записки МГУ. Математика. 1939. Т. 30, № 3. С. 3–16.
2. Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства. — М.: ИЛ, 1948.
3. Stein E.M. Functions of exponential type // Annals of Math. 1957. V. 65, № 2. P. 582–592.