# АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ В ЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[*)]

## Введение

Пусть $X$ есть линейное нормированное пространство, не обязательно полное, и $M$ — некоторое его подмножество. Для любого $x \in M$ обозначим через $Y(x)$ множество всех точек $y \in M$, ближайших к $x$; таким образом, $y \in Y(x)$ в том и

[*)] Revue de Math. pures et appl. 1963. V. 8, № 1. P. 5–18.

только том случае, если $y \in M$ и
$$\rho(x, M) = \inf_{z \in M} \|x - z\| = \|x - y\|.$$
Не исключено, что для некоторых $x \in X$, $Y(x) = \Lambda$, т.е. пусто.

В настоящей работе изучаются свойства множества $Q(M)$, состоящего из тех точек $x \in X$, для которых $Y(x)$ содержит не более одного элемента. Множество $Q(M)$ характеризует ту часть пространства $X$, относительно которой $M$ есть *множество единственности*; выясняется, что свойства множества $Q(M)$ зависят не столько от свойств множества $M$, сколько от геометрических свойств единичного шара пространства $X$.

Если пространство $X$ строго выпукло, то согласно теореме 1 настоящей работы для любого $M \subseteq X$ множество $Q(M)$ всюду плотно в $X$. С другой стороны, нетрудно видеть, что если полное пространство $X$ не является строго выпуклым, то в нем существует гиперплоскость $L$, для которой $Q(L) = L$. Отсюда вытекает новая конструктивная характеристика строго выпуклых банаховых пространств.

В § 3 мы показываем, что если пространство $X$ полно и локально равномерно выпукло, то для любого $M \subseteq X$ множество $Q(M)$ есть множество второй категории в $X$ [1)]. Это означает, что при сделанных предположениях множество тех точек $x \in X$, для которых в $M$ имеется более одного ближайшего элемента, является крайне редким, хотя, как показывают примеры, оно может быть всюду плотным в некоторой области.

В § 4 мы устанавливаем, что если банахово пространство равномерно выпукло, а множество $M$ замкнуто, то имеет вторую категорию множество $Q_1(M)$ тех точек $x \in X$, для которых $Y(x)$ состоит ровно из одного элемента.

Как в смысле постановок задач, так и по методам доказательств эта работа тесно примыкает к нашей совместной с Н.В. Ефимовым работе [2].

Многие вопросы, относящиеся к рассматриваемой проблематике, остаются открытыми. В конце каждого параграфа сформулированы те из них, которые мы считаем наиболее интересными и важными.

## § 1. Множества в строго выпуклых пространствах

Линейное нормированное пространство $X$ называется *строго выпуклым*, если его единичная сфера $S = \{\|x\| = 1\}$ не содержит отрезков, т.е. если для любых элементов $x_1, x_2 \in S$, $x_1 \neq x_2$, и любого числа $t \in (0, 1)$ выполняется неравенство
$$\|tx_1 + (1 - t)x_2\| < 1.$$

Строго выпуклые пространства впервые рассматривались Кларксоном [4]. Хорошо известно, что пространство $X$ строго выпукло в том и только том случае, если оно *строго нормировано*, т.е. если равенство
$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$
имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha x = \beta y$, где
$$\alpha \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0.$$

Нам понадобится следующее простое свойство строго выпуклых пространств.

---

1) Под множествами второй категории в этой работе понимаются такие множества, дополнения которых являются множествами первой категории.

Лемма 1. *Пусть $X$ — строго выпуклое линейное нормированное пространство, $M \subseteq X$, $x_0 \in X$, $x_0 \notin M$, $y_0 \in Y(x_0)$. Тогда для любого элемента $x$ из полуинтервала $(x_0, y_0)$*

$$Y(x) = y_0.$$

В самом деле, без ограничения можно считать, что $x = \theta$, $x_0 = -\alpha y_0$, где $\alpha > 0$. Пусть, вопреки утверждению, $y_1 \in Y(x) \subseteq M$, $y_1 \neq y_0$. Тогда

$$\|y_0\| = \|y_1\| \quad \text{и} \quad y_1 - x_0 = y_1 + \alpha y_0 = (1+\alpha)\Big(\frac{1}{1+\alpha}\, y_1 + \frac{\alpha}{1+\alpha}\, y_0\Big),$$

откуда в силу строгой выпуклости $X$

$$\|y_1 - x_0\| < (1+\alpha)\,\|y_0\| = \|y_0 - x_0\|,$$

что невозможно, так как

$$\|y_0 - x_0\| = \inf_{y \in M} \|x_0 - y\|.$$

Теорема 1. *Пусть $X$ — строго выпуклое линейное нормированное пространство. Тогда для любого множества $M \subseteq X$*

$$\overline{Q(M)} = X,$$

*т.е. $Q(M)$ всюду плотно в $X$.*

Доказательство. Пусть $x$ — произвольная точка $X$. Надо установить, что в любой ее окрестности содержится точка $x' \in Q(M)$. Если $x \in Q(M)$, то доказательство закончено. Если же $x \notin Q(M)$, то $x \notin M$ и $Y(x)$ содержит по крайней мере две точки, $y_1$, $y_2 \in M$. Но тогда в силу леммы 1 для любой точки $x' \in (x, y_1)$ имеем $x' \in Q(M)$, так как $Y(x') = y_1$. В частности, в любой окрестности точки $x \notin Q(M)$ содержится точка $x' \in Q(M)$, и теорема доказана.

Для конечномерных пространств эта теорема была другим путем доказана Л.Н. Коротаевым.

Множество $M \subseteq X$ будем называть *относительно ограниченно компактным*, если его пересечение с любым шаром компактно (в пространстве).

Теорема 2. *Пусть $X$ — строго выпуклое пространство типа $(B)$ и $M$ — его относительно ограниченно компактное подмножество. Тогда*

$$Q(M) = Q_{\Pi},$$

*т.е. $Q(M)$ есть множество второй категории в $X$. Если, кроме того, $M$ замкнуто, то $Q(M)$ есть множество типа $G_\delta$.*

Доказательство. Обозначим через $P(M)$ множество тех точек $x \in X$, для которых в $M$ имеется более одной ближайшей точки. Очевидно,

$$Q(M) = X \setminus P(M),$$

$$P(M) \subseteq P(\overline{M}).$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить, что если $M$ — замкнутое ограниченно компактное множество, то $P(M)$ может быть представлено в форме

$$P(M) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n, \tag{1}$$

где каждое из $\Phi_n$ замкнуто и нигде не плотно.

Пусть $d(x) = D\{Y(x)\}$ есть диаметр множества $Y(x)$. Определим $\Phi_\alpha$ $(\alpha > 0)$ как множество всех точек $x \in X$, для которых $d(x) \geqslant 1/\alpha$. Тогда справедлива формула (1) и остается показать, что каждое из $\Phi_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ замкнуто и нигде не плотно.

$\Phi_n$ *замкнуто*. Пусть $x_k \in \Phi_n$ $(k = l, 2, \dots)$ и $x_k \to x_0$ $(k \to \infty)$. Так как для ограниченно компактных $M$ множества $Y(x)$ компактны, то для любого $k = 1, 2, \dots$ найдутся точки $y'_k$ и $y''_k \in Y(x_n)$ такие, что $\rho(y'_k, y''_k) \geqslant 1/n$. В силу ограниченности этих последовательностей и ограниченной компактности $M$ из них можно выделить сходящиеся последовательности $\{y'_{k_l}\}$ и $\{y''_{k_l}\}$ $(l = 1, 2, \dots)$. Имеем

$$y'_{k_l} \to y'_0 \in M, \quad y''_{k_l} \to y''_0 \in M \quad \text{и} \quad \rho(y'_0,\, y''_0) \geqslant \frac{1}{n}.$$

Далее,

$$\rho(x_0, M) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n,\, y'_n) = \lim_{l\to\infty} \rho(x_{n_l},\, y'_{n_l}) = \rho(x_0,\, y'_0)$$

и

$$\rho(x_0,\, M) = \rho(x_0,\, y''_0).$$

Таким образом, $x_0 \in \Phi_n$, т.е. $\Phi_n$ замкнуто.

$\Phi_n$ *нигде не плотно*. В силу доказанной замкнутости $\Phi_n$ достаточно показать, что $\Phi_n$ не содержит внутренних точек. Но если $x \in \Phi_n$ и $y \in Y(x)$, то по лемме 1 интервал $(x, y)$ не пересекается с $\Phi_n$, т.е. $\Phi_n$ не имеет внутренних точек.

Теорема доказана.

Для случая компактных множеств $M$ эта теорема была сообщена мне А.Л. Гаркави, а в конечномерном случае (где всякое подмножество является относительно ограниченно компактным) была независимо доказана автором.

Нам не известно, будет ли для произвольного множества $M \subseteq X$ всегда $Q(M) = Q_\Pi$. Во всяком случае, приведенное выше доказательство не проходит, так как даже для замкнутых множеств $M$ множества $\Phi_n$ не обязаны быть замкнутыми (см. § 5).

## § 2. Конструктивные характеристики строго выпуклых пространств

*Конструктивными характеристиками* пространства мы называем такие его характеристики, которые выражаются в терминах аппроксимативных свойств его подмножеств.

Примерами конструктивных характеристик строго выпуклых пространств могут служить следующие хорошо известные предложения, в которых под *множествами единственности* понимаются множества $M \subseteq X$, удовлетворяющие условию $Q(M) = X$.

(A) *Для того чтобы пространство $X$ типа $(B)$ было строго выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы любое его подпространство $L$ было множеством единственности.*

(B) *Для того чтобы пространство $X$ типа $(B)$ было строго выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы любое его выпуклое подмножество $V$ было множеством единственности.*

Ради полноты приведем доказательства этих предложений. Поскольку всякое подпространство $L$ является выпуклым множеством, то следует установить необходимость условий теоремы (B) и достаточность условий теоремы (A).

Н е о б х о д и м о с т ь. *Пусть $X$ — строго выпуклое нормированное пространство. Тогда любое его выпуклое подмножество есть множество единственности.*

В самом деле, если для некоторой точки $x_0 \in X$ множество $Y(x_0)$ содержит по крайней мере два различных элемента, $y_0$ и $y_1$, то в силу выпуклости $V$ точка $y_2 = (y_0 + y_1)/2$ принадлежит $V$, а в силу строгой выпуклости $X$

$$\|x_0 - y_2\| < \|x_0 - y_1\|,$$

что противоречит определению $Y(x_0)$ [2].

Д о с т а т о ч н о с т ь. *Пусть любое подпространство $L \in X$ есть множество единственности. Тогда $X$ строго выпукло.*

Допустим противное. Именно, пусть $x_0, x_1 \in S$ и $\|(x_0 + x_1)/2\| = 1$. Тогда прямая $l$, проходящая через точки $X_0$ и $X_1$, находится на расстоянии 1 от $\theta$. Построим подпространство $L$, состоящее из точек вида $x - x_0$, где $x \in l$. Тогда $\rho(-x_0, L) = 1$ и $\theta$, $x_1 - x_0 \in Y(-x_0)$, т.е. $L$ не является множеством единственности.

Здесь мы получим характеристику строго выпуклых пространств, зависящую от свойств произвольных подмножеств $M \subseteq X$. Будем говорить, что $M$ есть *множество почти единственности*, если $Q(M)$ всюду плотно в $X$.

Теорема 3. *Для того чтобы пространство $X$ типа* (B) *было строго выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы любое его подмножество $M$ было множеством почти единственности.*

Необходимость условий этой теоремы содержится в теореме 1. Установим их достаточность. Для этого покажем, что если пространство $X$ не является строго выпуклым, то в нем существует гиперплоскость $L$, для которой $Q(Z) = L$.

Пусть $x_1, x_2 \in S$, $x_1 \neq x_2$ e $\|(x_1 + x_2)/2\| = 1$. Положим $(x_1 + x_2)/2 = x'$ и построим функционал $f(x)$, для которого эта точка является экстремальной, т.е. $f(x') = \|f\| > 0$. Далее, положим $L = \{f(y) = \|f\|\}$ и покажем, что это множество удовлетворяет всем требованиям. Очевидно, $x_1, x_2, x' \in L$. Далее,

$$\rho(\theta, L) = 1$$

и если $f(x) = \alpha \|f\|$, где $\alpha \neq 1$, то точки

$$y_1 = x + (1 - \alpha)x_1, \quad y_2 = x + (1 - \alpha)x_2, \quad y' = x + (1 - \alpha)x'$$

принадлежат $Y(x)$, и теорема доказана.

Следующий вопрос остается открытым. Пусть пространство типа (B) обладает тем свойством, что для любого компактного множества $M \subseteq X$ $\overline{Q(M)} = X$ или $Q(M) = Q_\Pi$. Вытекает ли отсюда, что $X$ строго выпукло?

## § 3. Множества в локально равномерно выпуклых пространствах

Линейное нормированное пространство $X$ называется *локально равномерно выпуклым*, если для любой точки $x_1 \in S$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, x_1)$ такое, что для любой точки $x_2 \in S$, удовлетворяющей условию $\|x_1 - x_2\| \geqslant \varepsilon$, выполняется неравенство

$$\left\| \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right\| \leqslant 1 - \delta.$$

[2] Ср. [1, § 9].

Локально равномерно выпуклые пространства впервые рассматривались Ловаглиа [7] (см. также [5]). Нетрудно показать, что всякое локально равномерно выпуклое пространство строго выпукло, а обратное, вообще говоря, неверно.

Пусть $E_r(a)$ есть замкнутый шар радиуса $r$ с центром в точке $a$. Нам понадобится следующее свойство локально равномерно выпуклых пространств.

Лемма 2. *Пусть $X$ — локально равномерно выпуклое линейно нормированное пространство. Тогда для любой точки $x_0 \in S$ и любого $\alpha$, $0 < \alpha < 1$, множество*

$$M_\varepsilon = \{X \setminus E_1(\theta)\} \cap E_{1-\alpha+\varepsilon}(\alpha x_0)$$

*имеет диаметр $D\{M_\varepsilon\} \to 0$ при $\varepsilon \to +0$.*

Доказательство. Прежде всего отметим,что при фиксированных $x_0$ и $\varepsilon$ множества $M_\varepsilon = M_\varepsilon(\alpha)$ не увеличиваются при увеличении $\alpha$. Поэтому достаточно доказать наше утверждение для $0 < \alpha \leqslant 1/2$.

Допустим, что при некоторых $x_0 \in S$ и $\alpha_0 \in (0,\, 1/2)$ множества

$$M_\varepsilon^0 = \{X \setminus E_1(\theta)\} \cap E_{1-\alpha_0+\varepsilon}(\alpha_0 x_0)$$

имеют для любого $\varepsilon > 0$ диаметр

$$D\{M_\varepsilon^0\} > 2d_0 > 0,$$

и покажем, что при достаточно малых $\varepsilon$ это предположение ведет к противоречию.

Ради удобства выкладок перенесем начало в точку $\alpha_0\, x_0$. Тогда

$$M_\varepsilon^0 = \{X \setminus E_1(-\alpha_0\, x_0)\} \cap E_{1-\alpha_0+\varepsilon}(\theta),$$

и точка $x_0$ переходит в точку $x_0' = (1-\alpha_0)x_0$. Так как $x_0' \in M_\varepsilon^0$ и $D\{M_\varepsilon^0\} > 2d_0$, то найдется точка $y_1 \in M_\varepsilon^0$, для которой $\|x_0' - y_1\| > d_0$. Очевидно,

$$1 - \alpha_0 \leqslant \|y_1\| \leqslant 1 - \alpha_0 + \varepsilon.$$

Полагая $y_1 = (\|y_1\|/\|x_0'\|)\, y_0$, находим, что $\|y_0\| = \|x_0'\| = 1 - \alpha_0$,

$$\|y_1 - y_0\| = \left(\frac{\|y_1\|}{\|x_0'\|} - 1\right)\|x_0'\| = \|y_1\| - \|x_0'\| \leqslant \varepsilon$$

и

$$\|x_0' - y_0\| \geqslant \|x_0' - y_1\| - \|y_1 - y_0\| > d_0 - \varepsilon > \frac{d_0}{2}$$

при $\varepsilon < d_0/2$.

Оценим теперь сверху величину $\|y_1 + \alpha_0 x_0\|$. Имеем

$$y_1 + \alpha_0 x_0 = y_1 - y_0 + y_0 + \frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}\, x_0' =$$
$$= y_1 - y_0 + \left(1 - \frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}\right) y_0 + \frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}\,(y_0 + x_0'),$$

откуда

$$\|y_1 + \alpha_0 x_0\| \leqslant \|y_1 - y_0\| + \left(1 - \frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}\right)\|y_0\| + \frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}\left\|\frac{y_0 + x_0'}{\|x_0'\|}\right\|\|x_0'\| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + \left(1 - \frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}\right)(1-\alpha_0) + \frac{2\alpha_0}{1-\alpha_0}(1-\alpha_0)(1-\delta) = 1 + \varepsilon - 2\alpha_0\delta,$$

где в силу локальной равномерной выпуклости $X$ $\delta > 0$ и зависит только от $x_0$, $\alpha_0$ и $d_0/(1-\alpha_0)$. Таким образом, при $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$\|y_1 + \alpha_0 x_0\| < 1,$$

что противоречит условию $y_1 \in M_\varepsilon^0$. Лемма доказана.

Пусть $X$ есть произвольное пространство типа (B), $x \in X$, $M \subseteq X$ и $\rho(x, M) = \gamma > 0$. Положим

$$\begin{aligned} Y_\varepsilon &= E_{\gamma+\varepsilon}(x) \cap M \qquad (\varepsilon > 0), \\ d_\varepsilon &= D\{Y_\varepsilon(x)\}, \\ d_0(x) &= \lim_{\varepsilon \to +0} d_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Через $F_\alpha = F_\alpha(M)$ $(\alpha > 0)$ будем обозначать множества всех точек $x \in X$, для которых $d_0(x) \geqslant 1/\alpha$.

Очевидно, для любого $x \in X$ $d_0(x) \geqslant d(x)$ и, следовательно, $F_\alpha \supseteq \Phi_\alpha$ $(\alpha > 0)$. Если же множество $M$ ограниченно компактно, то $F_\alpha = \Phi_\alpha$ $(\alpha > 0)$.

Множества $F_\alpha$ обладают более простыми свойствами, чем множества $\Phi_\alpha$. Например, имеет место

Лемма 3. *Пусть $X$ — произвольное пространство типа* (B). *Тогда для любого $M \subseteq X$ и любого $\alpha > 0$ множество $F_\alpha(M)$ замкнуто.*

Доказательство. Пусть $x_k \in F_\alpha(M)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $x_k \to x_0$ $(k \to \infty)$. Положим

$$\rho(x_k, M) = \gamma_k, \qquad \rho(x_0, M) = \gamma_0.$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и пусть $\|x_k - x_0\| \leqslant \varepsilon/3$ $(k \geqslant k_0(\varepsilon))$. Тогда при $k \geqslant k_0$

$$\gamma_k \leqslant \gamma_0 + \|x_k - x_0\| \leqslant \gamma_0 + \frac{\varepsilon}{3},$$

откуда

$$\begin{gathered} E_{\gamma_k+\varepsilon/3}(x_k) \subseteq E_{\gamma_0+2\varepsilon/3}(x_k) \subseteq E_{\gamma_0+\varepsilon}(x_0), \\ Y_{\varepsilon/3}(x_k) \subseteq Y_\varepsilon(x_0) \end{gathered}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\alpha} \leqslant d_{\varepsilon/3}(x_k) \leqslant d_\varepsilon(x_0),$$

т.е. $x_0 \in F_\alpha(M)$. Лемма доказана.

Отметим, что множество

$$G_\alpha = G_\alpha(M) = X \setminus F_\alpha(M)$$

состоит из всех точек $x$, для которых $d_0(x) < 1/\alpha$ и по только что доказанному является открытым.

После этих вспомогательных рассмотрений мы можем доказать основную теорему этого параграфа.

Теорема 4. *Пусть $X$ — локально равномерно выпуклое пространство типа* (B). *Тогда для любого множества $M \subseteq X$*

$$Q(M) = Q_\Pi.$$

Доказательство. Покажем, что каждое множество $\Phi_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ нигде не плотно, т.е. в любом шаре $O$ содержится шар $O'$, не пересекающийся с $\Phi_n$.

Зафиксируем произвольно шар $O$. Если $O \cap \Phi_n = \Lambda$, то доказательство закончено. Поэтому пусть $x \in O$, $x \in \Phi_n$. Тогда $x \notin M$. Пусть $y_0 \in Y(x)$ и $z \in (x, y_0)$. Из леммы 2 вытекает, что $D\{Y_\varepsilon(z)\} \to 0$ $(\varepsilon \to +0)$, т.е. $z \in G_n$. Но согласно лемме 3 $G_n$ открыто и, следовательно, существует целый шар $O' = O'(z) \subset O$, содержащийся в $G_n$. Для любой точки $z'$ из этого шара имеем $z' \in G_n$, $z' \notin F_n$, $z' \notin \Phi_n$, т.е. $O' \cap \Phi_n = \Lambda$. Итак, каждое $\Phi_n$ нигде не плотно и, значит,

$$P(M) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n$$

есть множество первой категории. Так как

$$Q(M) = X \setminus P(M),$$

то теорема полностью доказана.

Отметим, что эта теорема справедлива не только для локально равномерно выпуклых пространств, но и для пространств, обладающих свойством, составляющим утверждение леммы 2.

Неизвестно, переносится ли эта теорема на сильно выпуклые пространства, т.е. на пространства, обладающие следующим свойством: для любого функционала $f(x)$, $\|f\| = 1$,

$$D\{N_\varepsilon\} \to 0 \qquad (\varepsilon \to +0),$$

где

$$N_\varepsilon = \{f(x) \geqslant 1 - \varepsilon\} \cap E_1(\theta).$$

Кроме того, нам не удалось доказать, что в локально равномерно выпуклых пространствах не только множества $\Phi_n$, но и множества $F_n$ нигде не плотны.

## § 4. Множества в равномерно выпуклых пространствах

Линейное нормированное пространство $X$ называется *равномерно выпуклым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой пары точек $x_1$, $x_2 \in S$, для которых $\|x_2 - x_1\| \geqslant \varepsilon$, выполняется неравенство

$$\left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| \leqslant 1 - \delta,$$

т.е. если условие локальной равномерной выпуклости выполняется равномерно относительно $x_1 \in S$.

Равномерно выпуклые банаховы пространства впервые изучались Кларксоном [4] в 1936 г. Хорошо известно, что всякое равномерно выпуклое банахово пространство $X$ рефлексивно, т.е. $X = X^{**}$ (см. [3, 6]).

Для равномерно выпуклых пространств справедливо следующее уточнение леммы 2.

Лемма 4. *Пусть $X$ — равномерно выпуклое линейное нормированное пространство, $\delta > 0$, $0 < \alpha < 1$, $\|x_0\| = \alpha$ и*

$$M_\delta = M_\delta(x_0) = \{X \setminus E_1(\theta)\} \cap E_{1-\alpha+\varepsilon}(x_0).$$

*Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, \alpha)$ такое, что для всех $\delta \leqslant \delta_0$ и всех $x_0$, $\|x_0\| = \alpha$,*

$$D\big\{M_\delta(x_0)\big\} < \varepsilon.$$

Доказательство этой леммы мало отличается от доказательства леммы 2, и мы его опускаем.

Отметим, что эта лемма является также простым следствием из результатов работы Н.В. Ефимова и С.Б. Стечкина [2].

Пусть, как и в § 3, $x \in X$, $M \subseteq X$, $\rho(x_1, M) = \gamma > 0$,

$$Y_\varepsilon(x) = E_{\gamma+\varepsilon}(x) \cap M \qquad (\varepsilon > 0),$$

$$d_0(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} D\big\{Y_\varepsilon(x)\big\}.$$

Теорема 5. *Пусть $X$ — равномерно выпуклое пространство типа* (B) *и $M$ — некоторое его подмножество. Тогда множество $K = K(M)$ тех точек $x \in X$, для которых $d_0(x) = 0$, есть множество второй категории типа $G_\delta$.*

Доказательство. Имеем

$$K(M) = X \setminus H(M),$$

где

$$H(M) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Поэтому достаточно установить, что каждое множество $F_n$ замкнуто и нигде не плотно. Замкнутость множеств $F_n$ вытекает из леммы 3 для любого пространства $X$ типа (B). Покажем, что если пространство $X$ равномерно выпукло, то множества $F_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ нигде не плотны или (что в силу замкнутости $F_n$ одно и то же) что в любой окрестности $O(x)$ точки $x \in F_n$ содержится точка $x_1 \notin F_n$.

Осуществляя перенос начала и подобное преобразование, мы без ограничения общности можем считать, что $x = \theta$ и $\rho(\theta, M) = 1$. Зафиксируем произвольно номер $n$ и окрестность $O = O(\theta)$, и пусть число $\alpha > 0$ таково, что

$$E_\alpha(\theta) \subset O.$$

Зададим $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 1/n$ и по лемме 4 найдем $\delta_0 > 0$ такое, что для любой точки $x_0 \in X$, $\|x\| = \alpha$ и любого $\delta > 0$, $\delta \leqslant \delta_0$,

$$D\{M_\delta(x_0)\} < \varepsilon < \frac{1}{n}. \tag{1}$$

Далее, так как $\rho(\theta, M) = 1$, то существует точка $y_1 \in M$, для которой $\rho(\theta, y_1) < 1 + \delta_0$. Положим

$$x_1 = \alpha \, \frac{y_1}{\|y_1\|}\,.$$

Тогда $\|x_1\| = \alpha$, так что $x_1 \in O$ и

$$Y_{\delta_0}(x_1) \subseteq M_{\delta_0}(x_1),$$

откуда в силу (2)

$$D\{Y_{\delta_0}(x_1)\} < \frac{1}{n}\,.$$

Поэтому $d_0(x_1) < 1/n$ и, следовательно, $x_1 \notin F_n$.

Таким образом, построенная точка $x_1 = x_1(n)$ удовлетворяет всем требованиям, и теорема доказана.

Отметим, что если $X$ есть произвольное пространство типа (B) и $M$ — его замкнутое подмножество, то для любой точки $x \in K(M)$ во множестве $M$ имеется ровно одна точка $y = y(x)$, ближайшая к $x$. В самом деле, имеем

$$Y(x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} Y_\varepsilon(x).$$

Так как в нашем случае каждое множество $Y_\varepsilon(x)$ замкнуто, $Y_{\varepsilon_1}(x) \subseteq Y_{\varepsilon_2}(x)$ при $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ и в силу условия $x \in K(M)$

$$d_\varepsilon(x) = D\{Y_\varepsilon(x)\} \to 0 \qquad (\varepsilon \to +0),$$

то $Y(x)$ состоит из единственной точки $y = y(x) \in M$.

Отсюда вытекает такое

Следствие. *Пусть $X$ есть равномерно выпуклое пространство типа* (B) *и $M$ — его замкнутое подмножество. Тогда множество $Q_1(M)$ тех точек $x \in X$, для каждой из которых в $M$ имеется ровно одна ближайшая точка, есть множество второй категории в $X$.*

Нам неизвестно, остается ли это предложение справедливым для локально равномерно выпуклых пространств.

## § 5. Примеры

В этом параграфе мы приведем несколько примеров, иллюстрирующих доказанные теоремы и фигурирующие в них понятия.

1) Пусть $X$ есть пространство $L_p$ на отрезке $[0,1]$, причем $p > 1$, а $M = M_n$ — множество всех рациональных дробей вида

$$R_n(t) = \frac{a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n}{b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n},$$

конечных на $[0,1]$. Нетрудно убедиться, что это множество замкнуто в $L_p$. Так как пространство $L_p$ при $p > 1$ равномерно выпукло (см. [4]), то в силу следствия из теоремы 5 отсюда вытекает, что в пространстве $L_p$ существует множество $Q_1$ второй категории такое, что для каждой функции $x(t) \in Q_1$ имеется ровно одна рациональная дробь $R_n(t)$, наименее уклоняющаяся от этой функции в метрике $L_p$.

Добавим, что, как доказано Н.В. Ефимовым и мною, $M_n$ не является множеством единственности; для случая $n = 1$ это утверждение было получено ранее Л.В. Тайковым.

2) В гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ существует ограниченное замкнутое множество $M$, для которого множество $\Phi_n$ не является замкнутым при некотором фиксированном натуральном $n$.

Пусть $\{e_k\}$ $(k = 0, 1, 2 \ldots)$ есть ортонормированный базис пространства $\mathfrak{H}$. Положим

$$y_{2k-1} = (1+\varepsilon_n)e_k + \frac{1}{2}e_0, \qquad y_{2k} = (1+\varepsilon_k)e_k - \frac{1}{2}e_0 \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

где $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \to 0$ $(k \to \infty)$, и пусть

$$M = \{y_k\} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Рассмотрим точки $x_k = \varepsilon_k e_k$. Для этих точек имеем

$$\|x_k - y_{2k-1}\| = \|x_k - y_{2k}\| = \left\| e_k \pm \frac{1}{2}\, e_0 \right\| = \frac{\sqrt{5}}{2}\,,$$

$$\|x_k - y_{2l-1}\| = \|x_k - y_{2l}\| = \left\| \varepsilon_k e_k + (1+\varepsilon_l)e_l \pm \frac{1}{2}\, e_0 \right\| = \\ = \sqrt{\varepsilon_k^2 + (1+\varepsilon_l)^2 + \frac{1}{4}} > \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad (k \neq l).$$

Отсюда вытекает, что

$$\rho(x_k, M) = \frac{\sqrt{5}}{2}, \qquad Y(x_k) = \{y_{2k-1},\, y_{2k}\},$$
$$d(x_k) = D\{Y(x_k)\} = \|y_{2k-1} - y_{2k}\| = \|e_0\| = 1.$$

Таким образом, $x_k \in \Phi_1$ $(k = 1, 2, \dots)$.

Далее, замечаем, что $x_k \to \theta$, $\rho(\theta, M) = \sqrt{5}/2$ и $Y(\theta) = \Lambda$, так что $\theta \notin \Phi_1$ и, следовательно, множество $\Phi_1$ незамкнуто.

Путем небольшого усложнения примера можно было бы добиться того, чтобы множества $\Phi_n$ были незамкнуты для любого натурального $n$.

3) Множество $H(M)$ не обязано быть замкнутым. Это замечание тривиально. В качестве $X$ берем евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$, а в качестве $M$ — замкнутый сектор круга с центральным углом, большим $\pi$.

4) Пусть $E$ есть единичный круг в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Тогда существует замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^2$, для которого $H(M)$ всюду плотно в $E$.

Зафиксируем произвольно последовательность $x_n \in E$ $(n = 1, 2 \dots)$, всюду плотную в $E$, и построим замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^2$ такое, что для любого $n = 1, 2, \dots$ множество $Y(X_n)$ имеет мощность континуума. Тогда автоматически $x_n \in H(M)$ $(n = 1, 2 \dots)$.

Добавляя, если это необходимо, к $\{X_n\}$ точку $\theta$ и изменяя нумерацию членов последовательности, можем считать, что $x_1 = \theta$.

Множество $M$ будем строить, выбрасывая из плоскости $\mathbb{R}^2$ счетное множество открытых кругов $O_n$, причем $O_n$ имеет центр в точке $x_n$ и радиус $r_n < 2 - \|x_n\|$.

Пусть $r_1 = 1$ и числа $r_2, \dots, r_n$ уже определены. Положим

$$M_n = X \setminus \bigcup_{\nu=1}^{n} O_\nu.$$

В силу ограничений на $r_n$ множество

$$\bigcup_{\nu=1}^{n} O_\nu$$

целиком находится внутри круга $E_2$ радиуса 2 с центром в точке $\theta$, и граница $M_n$ состоит из конечного числа дуг окружностей. В качестве $O_{n+1}$ возьмем такой круг, чтобы внутри него содержалась часть границы $M_n$, имеющая мощность континуума и чтобы для всякой дуги окружности, из которых состоит граница $M_n$, внутри $O_{n+1}$ оказалось не более $1/3^n$ ее части. Очевидно, эти условия совместимы с условием $r_n < 2 - \|x_n\|$. Наконец, полагаем

$$M = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n.$$

Тогда граница $M$ содержит множество мощности континуума, расположенное на границе $O_n$ при любом $n$ и, следовательно, $Y(x_n)$ $(n = 1, 2 \dots)$ имеет мощность континуума.

В этом примере каждое множество $Y(x_n)$ имеет даже положительную линейную меру.

Вопрос о дескриптивных оценках $Q(M)$ в зависимости от $M$ остается открытым.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. — М., 1947.
2. *Ефимов Н.В., Стечкин С.Б.* Опорные свойства множеств в банаховых пространствах и чебышевские множества // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. С. 254–257.
3. *Мильман Д.П.* О некоторых признаках регулярности пространств типа (B) // Докл. АН СССР. 1938. Т. 20. С. 243–246.
4. *Clarkson J. A.* Uniformly convex spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1936. V. 40. P. 396–414.
5. *Fan Ky, Clicksberg J.* Some geometric properties of the spheres in a normed linear space // Duke Math. Journ. 1958. V. 25. P. 553–568.
6. *Kakutani S.* Weak topology and regularity of Banach spaces // Proc. of the Imp. Academy of Japan. 1939. V. 15. P. 169–173.
7. *Lovaglia A.R.* Locally uniformly convex Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1955. V. 78. P. 225–238.