

ОБОБЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВ С.Н. БЕРНШТЕЙНА ^{*)}

1. Пусть $t_n(x)$ есть тригонометрический полином порядка n , а $t_n^{(r)}(x)$ — его производная порядка r . С.Н. Бернштейн (см., например, [1]) доказал, что

$$\max_x |t_n^{(r)}(x)| \leq n^r \max_x |t_n(x)| \quad (r = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

и что это неравенство обращается в равенство, только если

$$t_n(x) = a \cos nx + b \sin nx.$$

Зададим натуральное число r и для любого h обозначим через $\Delta_h^r t_n(x)$ конечную разность k -го порядка от полинома $t_n(x)$ с шагом h :

$$\Delta_h^r t_n(x) = \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} t_n(x + ih). \quad (2)$$

Здесь будет доказано следующее обобщение неравенства (1).

ТЕОРЕМА. Пусть $0 < h < 2\pi/n$. Тогда для любого натурального r

$$\max_x |t_n^{(r)}(x)| \leq \left(\frac{n}{2 \sin(nh/2)} \right)^r \max_x |\Delta_h^r t_n(x)|, \quad (3)$$

и неравенство обращается в равенство в том и только том случае, если

$$t_n(x) = a \cos nx + b \sin nx + c. \quad (4)$$

2. Для доказательства этой теоремы нам понадобится одна лемма чебышевского характера.

ЛЕММА. Пусть $\max_x |t_n(x)| = L > 0$ и $t_n(x_0) = L$. Тогда

$$t_n(x_0 + \eta) \geq L \cos n\eta \quad \left(|\eta| \leq \frac{\pi}{n} \right). \quad (5)$$

Эта лемма может считаться известной. Она вытекает из результатов С.Н. Бернштейна [2].

Вот простое доказательство этой леммы. Пусть, например, для некоторого η , удовлетворяющего условиям $0 < \eta < \pi/n$, имеет место обратное неравенство

$$t_n(x_0 + \eta) < L \cos n\eta. \quad (6)$$

Рассмотрим тригонометрический полином

$$\psi_n(\eta) = t_n(x_0 + \eta) - L \cos n\eta.$$

Он имеет двойной корень при $\eta = 0$ и, кроме этих двух корней, еще $2n - 1$ корней, по одному в каждом из отрезков $[k\pi/n, (k+1)\pi/n]$ ($k = 0, 1, \dots, 2n - 2$) (двойные корни считаются за 2). Таким образом, $\psi_n(\eta)$, являясь тригонометрическим полиномом порядка не выше n , имеет на периоде 2π корень, откуда $\psi_n(\eta) \equiv 0$, что противоречит предположению (6).

Аналогично устанавливается невозможность неравенства (6) для $-\pi/n < \eta < 0$, и лемма доказана.

^{*)} Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 9. С. 1511-1514.

То же рассуждение показывает, что если для некоторого η ($0 < |\eta| \leq \pi/n$) неравенство (5) обращается в равенство, то $t_n(x) = a \cos nx + b \sin nx$, но это нам не понадобится.

3. Приступаем к доказательству теоремы. Начнем с рассмотрения случая $r = 1$. Положим $\max_x |t'_n(x)| = L$, и пусть, ради определенности, $t'_n(x_0) = L$. По доказанной лемме

$$t'_n(x_0 + \eta) \geq L \cos n\eta \quad \left(|\eta| \leq \frac{\pi}{n}\right).$$

Интегрируя это неравенство в пределах от $-h/2$ до $h/2$, получим

$$t_n\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - t_n\left(x_0 - \frac{h}{2}\right) \geq \frac{2L}{n} \sin \frac{nh}{2}. \quad (7)$$

Здесь имеет место знак равенства, только если для всех η , $|\eta| \leq h/2$,

$$t'_n(x_0 + \eta) = L \cos n\eta,$$

т.е. если $t_n(x)$ имеет вид (4).

Из неравенства (7) вытекает, что

$$\max_x |\Delta_h t'_n(x)| \geq \frac{2L}{n} \sin \frac{nh}{2},$$

или

$$\max_x |t'_n(x)| \leq \frac{n}{2 \sin(nh/2)} \max_x |\Delta_h t_n(x)|, \quad (8)$$

а это совпадает с (3) для $r = 1$.

Если (8) обращается в равенство, то обращается в равенство и (7), т.е. для этого необходимо, чтобы $t_n(x)$ имел вид (4). Прямой подсчет показывает, что этого и достаточно.

4. Из неравенства (8) с помощью индукции получается теорема для произвольного r .

Пусть доказано, что

$$\max_x |t_n^{(r)}(x)| \leq \left(\frac{n}{2 \sin(nh/2)}\right)^r \max_x |\Delta_h^r t_n(x)|$$

и что это неравенство обращается в равенство только для полиномов вида (4). Применяя это неравенство к полиному $\Delta_h t_n(x)$, находим, что

$$\max_x |\Delta_h t_n^{(r)}(x)| \leq \left(\frac{n}{2 \sin(nh/2)}\right)^r \max_x |\Delta_h^{r+1} t_n(x)|$$

с равенством только в случае (4). Далее, применяя (8) к полиному $t_n^{(r)}(x)$, получаем

$$\max_x |t_n^{(r+1)}(x)| \leq \frac{n}{2 \sin(nh/2)} \max_x |\Delta_h t_n^{(r)}(x)|$$

с равенством только в случае (4). Два последних неравенства дают (3) для $r+1$, а замечания о возможности равенства показывают, что (3) обращается в равенство для полиномов вида (4) и только для них. Теорема доказана.

В доказательстве неявно предполагалось, что $t_n(x)$ — вещественный полином. Нетрудно показать, что равенство (3) остается справедливым и для полиномов, принимающих комплексные значения.

Было бы интересно получить аналог неравенства (3) для $h > 2\pi/n$, $h \neq 2k\pi/p$ (k целое, $p = 1, 2, \dots, n$).

5. Отметим ряд следствий из доказанной теоремы.

А. Частный случай $h = \pi/n$. Тогда

$$\max_x |t_n^{(r)}(x)| \leq \left(\frac{n}{2}\right)^r \max_x |\Delta_{\pi/n}^r t_n(x)|. \quad (9)$$

Это неравенство получено одновременно с нами другим путем С.М. Никольским [3].

В. Неравенство С.Н. Бернштейна:

$$\max_x |t_n^{(r)}(x)| \leq n^r \max_x |t_n(x)|.$$

В самом деле, очевидно, что

$$\max_x |\Delta_h^r t_n(x)| \leq 2^r \max_x |t_n(x)|, \quad (10)$$

и объединение этого неравенства с (9) дает неравенство С.Н. Бернштейна. Нетрудно также проверить, что (8) и (10) одновременно обращаются в равенства, только если

$$t_n(x) = a \cos nx + b \sin nx.$$

С. Обобщение неравенства С.Н. Бернштейна для обыкновенных многочленов. Пусть $P_n(u)$ есть обыкновенный многочлен степени n . Положим

$$\omega(\delta, P_n) = \max_{\substack{-1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1 \\ 0 \leq u_2 - u_1 \leq \delta}} |P_n(u_2) - P_n(u_1)|.$$

Тогда

$$|P_n'(u)| \leq \frac{n}{2\sqrt{1-u^2}} \omega(2 \sin \frac{\pi}{2n}, P_n) \quad (|u| < 1). \quad (11)$$

Действительно, если $u = \cos x$, то согласно (9)

$$|P_n'(u) \sin x| \leq \frac{n}{2} \max_x \left| P_n\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{n}\right)\right) - P_n(\cos x) \right|. \quad (12)$$

Но $|\cos(x + \pi/2) - \cos x| \leq 2 \sin(\pi/(2n))$. Отсюда

$$\max_x \left| P_n\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{n}\right)\right) - P_n(\cos x) \right| \leq \omega\left(2 \sin \frac{\pi}{2n}, P_n\right); \quad (13)$$

(12) и (13) доставляют (11).

Д. Обобщение неравенства А.А. Маркова:

$$|P_n'(u)| \leq \frac{n^2}{2} \omega\left(2 \sin \frac{\pi}{2n}, P_n\right) \quad (|u| \leq 1).$$

Доказательство не отличается от обычного ([1, с. 168]), если воспользоваться неравенством (11).

Е. Пусть $0 < h < 2\pi/n$. Тогда

$$\left(\frac{2}{nh} \sin \frac{nh}{2}\right)^r \leq \frac{\max_x |\Delta_h^r t_n(x)|}{h^r \max_x |t_n^{(r)}(x)|} < 1.$$

Приложения доказанной теоремы и следствий из нее к некоторым вопросам теории приближения функций будут даны в другой работе.

Я выражаю глубокую благодарность академику С.Н. Бернштейну за внимание к моей работе и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бернштейн С.Н.* Экстремальные свойства полиномов. — М.—Л., 1937.
2. *Бернштейн С.Н.* Об одном классе интерполяционных формул // Изв. АН СССР. ОМОН. 1931. № 9. С. 1151–1161.
3. *Никольский С.М.* Обобщение одного неравенства С.Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 9. С. 1507–1510.