О МНОЖЕСТВАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ*)

§ 1. Введение

Пусть на отрезке $[a, b]$ определены функции $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Множество $E \subset [a, b]$ называется *множеством единственности* (U-множеством) для рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, f_n(x) \tag{1}$$

относительно сходимости или просто множеством единственности для рядов (1), если каждый ряд вида (1), сходящийся к нулю на $[a, b] \setminus E$, имеет коэффициенты $c_n = 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ Это понятие содержательно лишь в том случае, если пустое множество есть U-множество, т.е. если каждый ряд вида (1), сходящийся к нулю на всем отрезке $[a, b]$, имеет коэффициенты $c_n = 0$ для $n = 1, 2, \ldots$

Совершенно аналогично определяются множества единственности относительно методов суммирования. Именно, если задан дискретный или непрерывный регулярный метод суммирования T, то в указанном выше определении следует требовать не сходимость ряда к нулю, а его суммируемость к нулю методом T на $[a, b] \setminus E$.

Множества единственности для общих тригонометрических рядов

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\, \cos nx + b_n\, \sin nx) \tag{2}$$

служили предметом многочисленных исследований (см. [2; 8, гл. XI]). Согласно классической теореме Кантора пустое множество является для таких рядов U-множеством. Хорошо известно также, что измеримое U-множество для рядов (2) обязано иметь меру нуль. Д.Е. Меньшов [4] впервые построил пример множества $E \subset [0, 2\pi]$ с $mE = 0$, которое не является U-множеством, а Н.К. Бари [1] и А. Райхман [5] нашли целый класс совершенных U-множеств для тригонометрических рядов.

Что касается U-множеств относительно методов суммирования, то здесь дело обстоит несколько иначе. Например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, \sin nx \tag{3}$$

всюду суммируем к нулю методом Абеля, хотя его коэффициенты не равны нулю (см. [8, с. 292]). Этот пример показывает, что для тригонометрических рядов даже пустое множество не является U-множеством относительно метода суммирования Абеля. С другой стороны, если тригонометрический ряд суммируется в каждой точке к нулю методом $(C, 1)$, то все его коэффициенты равны нулю. Таким образом, U-множества существенно зависят от выбора метода суммирования.

Отметим еще, что нам не известно ни одного содержательного утверждения, относящегося к множествам единственности для рядов по переставленной тригонометрической системе.

---

*) Изв. АН СССР. Сер. матем. 1962. Т. 26. С. 211–222 (*совм. с П.Л. Ульяновым*).

Проблема единственности для лакунарных тригонометрических рядов, т.е. рядов вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\,\cos n_k x+b_k\,\sin n_k x), \tag{4}$$

где $n_{k+1}/n_k \geqslant \lambda > 1$, рассматривалась А. Зигмундом [7]. Он доказал, что если ряд (4) сходится к нулю на множестве E положительной меры, то $a_k = b_k = 0$ для всех k. Сопоставляя эту теорему с известными результатами относительно сходимости и суммируемости лакунарных тригонометрических рядов (см. [8, § 5.4]), получаем, что если ряд (4) суммируется к нулю регулярным методом T на множестве E положительной меры, то $a_k = b_k = 0$. Иными словами, всякое множество $E_1 \subset [0, 2\pi)$ с $mE_1 < 2\pi$ является U-множеством для лакунарных тригонометрических рядов относительно произвольного регулярного метода суммирования T. Таким образом, зависимость U-множеств от методов суммирования является здесь значительно меньшей, чем в случае общих тригонометрических рядов.

Отметим, наконец, что во всех ранее рассмотренных случаях множества единственности имели меру нуль или любую неполную меру.

В данной работе мы будем изучать множества единственности для рядов по системе Радемахера и по некоторым несколько более общим системам.

Система Радемахера $r_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ определяется следующим образом:

$$r_n(x)=\begin{cases}(-1)^i \quad \text{при} \quad \dfrac{i}{2^n}<x<\dfrac{i+1}{2^n} & (i=0,1,\ldots,2^n-1),\\[2mm] \quad 0 \quad\ \ \text{при} \quad x=\dfrac{i}{2^n} & (i=0,1,\ldots,2^n-1),\end{cases}$$

$$r_n(x+1)=r_n(x) \quad \text{для всех} \quad x.$$

Через $\{r_{k_m}\}$ мы будем обозначать всякую переставленную систему Радемахера.

Одним из основных результатов настоящей работы является следующая

Теорема. *Пусть даны регулярный метод суммирования T и ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m\, r_{k_m}(x). \tag{5}$$

Тогда если E — множество всех точек отрезка $[0,1]$, в которых ряд (5) суммируем методом T к нулю, то:

1) *mE есть двоично-рациональное число;*

2) *если $mE > 1/2$, то все $a_m = 0$;*

3) *если $mE > 0$, то найдется такой номер m_0, что $a_m = 0$ при всех $m \geqslant m_0$.*

Кроме того, существует ряд вида (5), который сходится к нулю на множестве E с $mE = 1/2$ и у которого не все коэффициенты равны нулю.

Эта теорема вытекает как частный случай из ряда других более общих утверждений, которые будут доказаны ниже.

Из сформулированной теоремы получаем, например, что всякое множество $A \subset [0, 1]$ с $mA < 1/2$ является множеством единственности для рядов по системе Радемахера как относительно сходимости, так и относительно суммируемости. При этом требование $mA < 1/2$ существенно, ибо существуют множества с мерой, равной 1/2, не являющиеся множествами единственности.

§ 2. Вспомогательные предложения

Пусть $\{r_n(x)\}$ — система Радемахера, а $\{r_{k_m}(x)\}$ — переставленная система Радемахера. Известно, что если из отрезка $[0,1]$ подходящим образом выбросить множество меры нуль, то оставшееся множество можно так взаимно однозначно (и с сохранением мер подмножеств) отобразить на себя с помощью функции $x=\tau(y)$, что на этом множестве

$$r_n(x)=r_n\bigl(\tau(y)\bigr)=r_{k_n}(y)$$

(см. [6]). Этот факт показывает, что при изучении рядов вида (5) мы можем считать, что индексы функций $r_{k_n}(x)$ совпадают с натуральным рядом чисел $1,2,\ldots$

Далее, если ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i\, r_i(x)$$

суммируем методом T к нулю на множестве E положительной меры, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2<\infty$$

и, стало быть, исходный ряд сходится почти всюду на $[0,1]$ (см. [8, § 5.5]). А так как T — регулярный метод, то исходный ряд сходится к нулю почти всюду на E. Таким образом, при изучении рядов по системе Радемахера мы всегда можем случай суммируемости свести к случаю сходимости.

Если дано множество E, то через E_h будем обозначать сдвинутое (на h) множество E, т.е. множество всех точек вида $x+h$, где $x\in E$.

Приведем несколько вспомогательных предложений.

Лемма 1. *Пусть E — измеримое множество, $E\subset[0,1]$. Тогда*

$$\lim_{h\to 0} m\,(E\cdot E_h)=mE. \tag{6}$$

Доказательство. Для всякого множества $A\subset(-2,2)$ обозначим через $\psi_A(x)$ его характеристическую функцию, т.е. положим

$$\psi_A(x)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad x\in A,\\ 0 & \text{при}\quad x\in(-2,2)\setminus A.\end{cases}$$

Очевидно, что при $|h|<1$

$$0\leqslant mE-m\,(E\cdot E_h)=\int_{-2}^{2}\psi_E^2(x)\,dx-\int_{-2}^{2}\psi_E(x)\,\psi_{E_h}(x)\,dx=$$

$$=\int_{-2}^{2}\psi_E(x)\bigl(\psi_E(x)-\psi_{E_h}(x)\bigr)\,dx=\int_{-2}^{2}\psi_E(x)\bigl(\psi_E(x)-\psi_E(x-h)\bigr)\,dx.$$

Поэтому

$$0\leqslant mE-m\,(E\cdot E_h)\leqslant\int_{-2}^{2}|\psi_E(x)-\psi_E(x-h)|\,dx\to 0$$

при $h\to 0$, ибо интегральный модуль непрерывности стремится к нулю при $|h|\to 0$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Если $h_i'\to 0$ при $i\to\infty$ и множество E имеет положительную меру, то из последовательности $\{h_i'\}$ можно выделить подпоследовательность $\{h_i\}$, а из множества E — подмножество M с $mM>0$ такие, что*

$$M_{h_i}\subset E\qquad (i=1,2,\ldots).$$

Доказательство. На основании равенства (6) из последовательности $\{h'_i\}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{h_i\}$, что

$$0 \leqslant mE - m\,(E \cdot E_{-h_i}) < \frac{mE}{2^{i+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Выбросим из E все те точки x, для которых $x + h_i \notin E$ хотя бы для одного i. Оставшееся множество M принадлежит E и в силу построения $M_{h_i} \subset E$ при всех i.

Далее, если i фиксировано, то множество всех точек $x \in E$, для которых $x + h_i \notin E$, имеет меру, меньшую $mE/2^{i+1}$ (см. [7]). Следовательно,

$$mM > mE - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{mE}{2^{i+1}} = mE - \frac{mE}{2} = \frac{mE}{2} > 0,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть даны натуральные числа $n_1 < n_2 < \ldots$ и множества*

$$A_k = \bigcup_{i=0}^{2^{n_k-1}-1} \left(\frac{i}{2^{n_k-1}},\ \frac{i+1}{2^{n_k-1}} - \frac{1}{2^{n_k}} \right).$$

Тогда при любом k_0

$$m\left(\bigcup_{k=k_0}^{\infty} A_k \right) = 1. \tag{8}$$

Доказательство. Так как последовательность $\{n_k\}$ строго возрастает, то

$$mA_{k_0} = \frac{1}{2}, \quad m(A_{k_0} \cup A_{k_0+1}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad m(A_{k_0} \cup A_{k_0+1} \cup \ldots \cup A_{k_0+i}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{i+1}},$$

и поэтому

$$m\left(\bigcup_{k=k_0}^{\infty} A_k \right) = \lim_{i \to \infty} \sum_{\nu=1}^{i+1} \frac{1}{2^\nu} = 1.$$

Следствие 2. *Если $B \subset [0,1]$ —множество положительной меры, а $n_k \uparrow \infty$, то найдется такое число N, что*

$$m(B \cdot A_k) > 0 \quad \text{при всех} \quad k \geqslant N.$$

Доказательство. Допустим противное, т.е. что для бесконечной возрастающей последовательности номеров k_i

$$m(B \cdot A_{k_i}) = 0. \tag{9}$$

Возьмем последовательность $n'_i = n_{k_i}$ и положим $A'_i = A_{k_i}$. Из (9) вытекает, что при любом i_0

$$m\left(B \cdot \bigcup_{i=i_0}^{\infty} A'_i \right) = 0. \tag{10}$$

С другой стороны, применяя лемму 2 к последовательностям n'_i и A'_i, мы получаем, что

$$m\left(\bigcup_{i=i_0}^{\infty} A'_i \right) = 1,$$

и поэтому

$$m\Big(B \cdot \bigcup_{i=i_0}^{\infty} A'_i\Big) > 0,$$

что противоречит (10). Следствие 2 доказано.

Лемма 3. *Пусть $E \subset [0,1]$ есть множество положительной меры и последовательность $\{r_k\}$ всюду плотна на $[-1,1]$. Положим*

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{r_k}.$$

Тогда

$$m(A \cdot [0,1]) = 1.$$

Доказательство. Положим $B = A \cdot [0,1]$ и допустим, что $mB < 1$. Тогда найдется точка $x_0 \in (0,1)$, которая является точкой разряжения множества B, т.е. удовлетворяет условию

$$\lim_{h \to +0} \frac{m\big(B \cdot (x_0 - h,\, x_0 + h)\big)}{2h} = 0. \tag{11}$$

С другой стороны, так как $mE > 0$, то найдется точка $x_1 \in E$, для которой

$$\lim_{h \to +0} \frac{m\big(E \cdot (x_1 - h,\, x_1 + h)\big)}{2h} = 1. \tag{12}$$

Из (11) и (12) вытекает, что можно найти такое $h_0 > 0$, что

$$(x_0 - h_0,\ x_0 + h_0) \subset (0,1), \qquad m\big(B \cdot (x_0 - h_0,\ x_0 + h_0)\big) < \frac{h_0}{4}, \tag{13}$$

$$(x_1 - h_0,\ x_1 + h_0) \subset (0,1), \qquad m\big(E \cdot (x_1 - h_0,\ x_1 + h_0)\big) < \frac{7}{4} h_0. \tag{14}$$

Так как множество A есть сумма всех множеств, которые получаются из E сдвигом на числа r_k, то можно найти такое r_{k_0}, что

$$|x_1 + r_{k_0} - x_0| < \frac{h_0}{4}$$

и (см. (14))

$$m\big(A \cdot (x_1 + r_{k_0} - h_0,\ x_1 + r_{k_0} + h_0)\big) > \frac{7}{4}\, h_0. \tag{15}$$

Значит (см. (15)),

$$m\big(B \cdot (x_0 - h_0,\ x_0 + h_0)\big) = m\big(A \cdot (x_0 - h_0,\ x_0 + h_0)\big) > h_0,$$

что противоречит (13). Лемма 3 доказана. (По поводу этой леммы см. также [3].)

§ 3. Множества единственности

Теорема 1. *Пусть $\varphi(t)$ — произвольная конечная функция с периодом 1. Если ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, \varphi(2^n t) \tag{16}$$

сходится на множестве $E \subset [0,1]$ положительной меры, то этот ряд сходится почти всюду на $[0,1]$.

Доказательство. Имеем

$$R_k(t) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n\, \varphi(2^n t) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

для всех $t \in E$. В силу периодичности функции $\varphi(t)$ для $n \geqslant q$ и любых целых p

$$\varphi\Big(2^n\Big(t+\frac{p}{2^q}\Big)\Big) = \varphi(2^n t + p2^{n-q}) = \varphi(2^n t).$$

Следовательно,

$$R_k\Big(t+\frac{p}{2^q}\Big) = R_k(t)$$

при $q \leqslant k$ и всех целых p. Поэтому при фиксированных p и q

$$R_k\Big(t+\frac{p}{2^q}\Big) \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

если только $t \in E$. Но это означает, что

$$R_k(u) \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

для $u \in E_{p/2^q}$. Таким образом, ряд (16) сходится на всех множествах $E_{p/2^q}$ и на основании леммы 3 ряд (16) сходится почти всюду на $[0,1]$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть $\varphi(t)$ — произвольная конечная функция с периодом 1, для которой $\varphi(t+1/2)-\varphi(t) \neq 0$ для почти всех точек $t \in [0,1]$. Если ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, \varphi(2^n t) \tag{17}$$

сходится к постоянной D на множестве $E \subset [0,1]$ с $mE > 1/2$, то $D = 0$ и все $c_n = 0$.

Доказательство. В силу теоремы 1 мы можем считать, что ряд (17) сходится почти всюду на прямой. Допустим теперь, что утверждение теоремы 2 неверно, т.е. существует первый отличный от нуля коэффициент c_{n_0}. Положим

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, \varphi(2^n t) = c_{n_0}\, \varphi(2^{n_0} t) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} c_n\, \varphi(2^n t).$$

Очевидно, для почти всех t

$$f\Big(t+\frac{1}{2^{n_0+1}}\Big) - f(t) = c_{n_0}\Big(\varphi\Big(2^{n_0}t+\frac{1}{2}\Big) - \varphi(2^{n_0}t)\Big).$$

Отсюда и из условия теоремы получаем, что

$$f\Big(t+\frac{1}{2^{n_0+1}}\Big) - f(t) \neq 0 \tag{18}$$

для почти всех t. Но функция $f(t)$ равна постоянной D на множестве $E \subset [0,1]$ с $mE > 1/2$. В силу периодичности функции $f(x)$ мы можем заключить, что и функция $f(x+1/2^{n_0+1})$ равна постоянной D на некотором множестве $E_1 \subset [0,1]$ с $mE_1 = mE > 1/2$. Но тогда

$$f\Big(t+\frac{1}{2^{n_0+1}}\Big) - f(t) = 0$$

на некотором множестве положительной меры, что противоречит (18).

Итак, все $c_n = 0$, и поэтому $D = 0$. Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 3. *Если ряд по системе Радемахера*

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m\, r_m(t) \tag{19}$$

сходится к постоянной D на некотором множестве $E \subset [0,1]$ с $mE > 1/2$, то $D = 0$ и все $a_n = 0$.

Доказательство. Если мы возьмем

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 < t < 1/2, \\ -1 & \text{при} \quad 1/2 < t < 1, \\ 0 & \text{при} \quad t = 0,\ 1/2,\ 1, \end{cases}$$

$$\varphi(t+1) = \varphi(t) \quad \text{при всех} \quad t,$$

то ряд (19) можно записать в виде

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m\, \varphi(2^m t),$$

и поэтому следствие вытекает из теоремы 2.

Теорема 3. *Всякое множество $A \subset [0,1]$ с $mA < 1/2$ является U-множеством для рядов по системе Радемахера.*

Это утверждение непосредственно вытекает из следствия 3.

Замечание. Рассмотрим ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m\, r_m(t),$$

где $a_1 = a_2 = 1$ и $a_m = 0$ при $m \geqslant 3$. Мы видим, что он сходится к нулю на множестве $E = (1/4,\, 3/4)$ с $mE = 1/2$, хотя не все его коэффициенты равны нулю. Этот пример показывает, что теорема 2 и следствие 3 окончательны в том смысле, что условие $mE > 1/2$ не может быть заменено даже условием $mE \geqslant 1/2$.

Полезно иметь в виду, что в теоремах 1 и 2 от функции $\varphi(t)$ измеримости не требуется.

Теорема 4. *Пусть ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m\, r_m(t) \tag{20}$$

сходится к постоянной D на некотором множестве $E \subset [0,1]$ положительной меры. Тогда найдется такое число m_0, что

$$a_m = 0 \quad \textit{при всех} \quad m \geqslant m_0. \tag{21}$$

Доказательство. Предположим, что равенство (21) не справедливо, т.е.

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m\, r_m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{m_k}\, r_{m_k}(t),$$

где $a_{m_k} \neq 0$ и $m_1 < m_2 < \dots$

Применяя следствие 1 к последовательности $1/2^{m_i}$ и к множеству E, мы найдем подмножество $M \subset E$ положительной меры и подпоследовательность $1/2^{n_i}$ (из $1/2^{m_i}$) такие, что

$$n_1 < n_2 < \ldots \quad \text{и} \quad M_{1/2^{n_k}} \subset E \quad \text{при всех} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{22}$$

Можно считать (см., например, теорему 1), что ряд (20) почти всюду сходится на всей прямой. Положим

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \, r_m(t).$$

Так как период функции $r_n(t)$ равен $1/2^{n-1}$, то для почти всех t

$$f\Big(t + \frac{1}{2^{n_k}}\Big) - f(t) = \sum_{m=1}^{n_k} a_m \Big\{ r_m\Big(t + \frac{1}{2^{n_k}}\Big) - r_m(t) \Big\} =$$

$$= a_{n_k} \Big\{ r_{n_k}\Big(t + \frac{1}{2^{n_k}}\Big) - r_{n_k}(t) \Big\} + \sum_{m=1}^{n_k - 1} a_m \Big\{ r_m\Big(t + \frac{1}{2^{n_k}}\Big) - r_m(t) \Big\} =$$

$$= -2\, a_{n_k} \, r_{n_k}(t) + F_k(t), \tag{23}$$

где

$$F_k(t) = \sum_{m=1}^{n_k - 1} a_m \Big\{ r_m\Big(t + \frac{1}{2^{n_k}}\Big) - r_m(t) \Big\}. \tag{24}$$

Но $f(t) = D$ при $t \in E$. Поэтому в силу (22)

$$f\Big(t + \frac{1}{2^{n_k}}\Big) - f(t) = 0 \quad \text{для} \quad t \in M$$

и, значит,

$$F_k(t) = 2\, a_{n_k} \, r_{n_k}(t) \quad \text{при} \quad t \in M.$$

Но $a_{n_k} \neq 0$, и поэтому

$$F_k(t) \neq 0 \tag{25}$$

для всех k и всех точек $t \in M_1 \subset M$, где $mM_1 = mM > 0$.

С другой стороны, из формулы (24) вытекает, что

$$F_k(t) = 0$$

для

$$t \in \bigcup_{i=0}^{2^{n_k - 1} - 1} \Big(\frac{i}{2^{n_k - 1}}, \ \frac{i+1}{2^{n_k - 1}} - \frac{1}{2^{n_k}} \Big) = A_k.$$

Применяя следствие 2 к множествам M_1 и A_k ($k = 1, 2, \ldots$), получим, что $m(M_1 \cap A_k) > 0$ при $k \geqslant N$, т.е. для достаточно больших k $F_k(t) = 0$ на некоторых подмножествах M_1 положительной меры. Но это противоречит (25), и теорема доказана.

Из теоремы 4 вытекает

Следствие 4. *Если ряд (20) сходится к нулю на некотором множестве E положительной меры, то этот ряд есть полином по системе Радемахера.*

При предположениях теоремы 4 мы не можем утверждать, что все $a_m = 0$, так как, например, полином

$$r_1(t) + r_2(t)$$

обращается в нуль на множестве $E \subset [0,1]$ с $mE = 1/2$, а полином

$$\frac{1}{2}\, r_1(t) + \frac{1}{2}\, r_2(t) + r_3(t)$$

равен нулю на множестве $E_1 \subset [0,1]$ с $mE_1 = 1/4$.

Легко также заметить, что в теореме 4 (в отличие от следствия 3) мы не можем утверждать, что $D = 0$.

Пусть $\Phi_n(t)$ есть некоторый полином по системе Радемахера и E — множество всех точек $t \in [0,1]$, в которых этот полином обращается в нуль. Тогда, очевидно, mE является двоично-рациональным числом. Учитывая это замечание, а также утверждения, отмеченные в начале § 2, и замечания к теореме 3, убеждаемся, что из теоремы 3 и следствия 4 вытекает теорема, сформулированная во введении.

§ 4. О рядах по системе Радемахера, сходящихся к аналитическим функциям

Пусть M — множество всех точек отрезка $[0,1]$, которые не являются двоично-рациональными. Тогда каждое число $t \in M$ можно единственным образом представить в виде бесконечной двоичной дроби

$$t = 0, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots = 0, a_1(t) a_2(t) \ldots a_k(t) \ldots,$$

где все $a_1,\ a_2,\ \ldots$ принимают значения 0 и 1. Таким образом,

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(t)}{2^k} \quad \text{при} \quad t \in M. \tag{26}$$

Далее, на множестве M

$$r_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a_k(t) = 0, \\ -1, & \text{если} \quad a_k(t) = 1, \end{cases}$$

т.е.

$$r_k(t) = 1 - 2\, a_k(t) \quad \text{при} \quad t \in M. \tag{27}$$

Отсюда и из (26) вытекает, что для $t \in M$

$$2t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - r_k(t)}{2^k}, \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k(t)}{2^k} = 1 - 2t. \tag{28}$$

Последнее равенство показывает, что ряд по системе Радемахера может сходиться почти всюду к некоторой аналитической функции, не равной тождественно нулю.

Отметим, что функции Радемахера можно так переопределить на двоично-рациональных точках, чтобы равенство (28) имело место уже для всех $t \in (0,1)$, а не только для $t \in M$.

Теорема 5. *Пусть $\varphi(t)$ — конечная измеримая функция с периодом 1, имеющая почти всюду асимптотическую производную. Пусть, далее, ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, \varphi(2^n x) \tag{29}$$

сходится на множестве $E \subset [0,1]$ положительной меры к функции $F(t)$, которая имеет асимптотическую производную на E. Тогда ряд (29) сходится почти всюду на $(-\infty,+\infty)$ к функции $f(t)$, имеющей почти всюду асимптотическую производную. Если, кроме того, $\varphi'_{as}(t)=0$ почти всюду, то $f'_{as}(t)=D$ почти всюду, где D — некоторая постоянная.

Доказательство. Так как ряд (29) сходится на множестве $E \subset [0,1]$ положительной меры, то в силу теоремы 1 он сходится почти всюду на $(-\infty,+\infty)$ к некоторой функции $f(t)$ и $f(t)=F(t)$ при $t \in E$. Поэтому функция $f(t)$ имеет асимптотическую производную в каждой точке $t \in E$[1].

Очевидно, что при любых целых p и натуральных q

$$f\Big(t+\frac{p}{2^q}\Big)-f(t)=\sum_{n=0}^{q-1} a_n\left\{\varphi\Big(2^n\Big(t+\frac{p}{2^q}\Big)\Big)-\varphi(2^n t)\right\} \qquad (30)$$

для почти всех t. Но справа в равенстве (30) стоит функция, которая имеет почти всюду асимптотическую производную, и потому $f(t+p/2^q)$ также имеет почти всюду на E асимптотическую производную. Но это означает, что функция $f(u)$ имеет асимптотическую производную в почти каждой точке множества $E_{p/2^q}$, где $q=1,2,\dots$, а $p=0,\pm1,\pm2,\dots$ На основании леммы 3 выводим отсюда, что функция $f(u)$ почти всюду на всей прямой имеет асимптотическую производную.

Далее, если $\varphi'_{as}(t)=0$ почти всюду, то из равенства (30) вытекает, что из прямой $(-\infty,+\infty)$ можно подходящим образом выбросить множество меры нуль так, что на оставшемся множестве измеримая функция $f'_{as}(t)$ будет иметь в качестве периодов числа $1/2^q$ $(q=1,2,\dots)$. Но это возможно лишь в случае, когда $f'_{as}(x)$ равна постоянной для почти всех $x \in (-\infty,+\infty)$, что и требовалось доказать.

Заметим, что эта теорема без изменения доказательства переносится на функции, имеющие асимптотические производные высших порядков.

Из теоремы 5 вытекает

Следствие 5. *Если ряд по системе Радемахера*

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m\, r_m(t)$$

сходится почти всюду к функции $f(t)$, которая имеет асимптотическую производную на множестве положительной меры, то $f'_{as}(t)$ существует для почти всех $t \in (-\infty,+\infty)$ и $f'_{as}(t)=D$ для почти всех t, где D — некоторая постоянная.

Пример ряда (28) показывает, что в теореме 5 и в следствии 5 постоянная D может быть отличной от нуля.

Теорема 6. *Пусть $F(t)$ — аналитическая функция на $(0,1)$, а ряд по системе Радемахера*

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m\, r_m(t) \qquad (31)$$

[1] Мы здесь пользуемся тем фактом, что если функция $\psi(t)$, определенная на множестве M, имеет асимптотическую производную в каждой точке $t \in M$, то и любая другая функция $\tau(t)$, определенная на множестве $M_1 \supset M$ и совпадающая с $\psi(t)$ на M, также имеет асимптотическую производную на M, и $\tau'_{as}(t)=\psi'_{as}(t)$ для $t \in M$.

сходится к $F(t)$ на множестве $E \subset [0,1]$ с $mE > 1/2$. Тогда ряд (31) *сходится к $F(t)$ почти всюду на $[0,1]$,*

$$F(t) = C\,(1-2t),$$

где C — некоторая постоянная, и

$$a_m = \frac{C}{2^m} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Доказательство. Мы можем считать, что ряд (31) сходится почти всюду на $[0,1]$. Положим

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m\, r_m(t).$$

Так как $F(t)$ — аналитическая функция, то она (как функция, определенная на E) имеет почти всюду на E асимптотическую производную. Значит, в силу теоремы 5 для почти всех t

$$f'_{as}(t) = D, \tag{32}$$

где D — постоянная. Положим $D = -2C$. Так как $f(t) = F(t)$ при $t \in E$, то из (32) вытекает, что $F'(t) = -2C$ для почти всех $t \in E$, где $mE > 1/2$. А это возможно лишь в случае, когда

$$F(t) = -2Ct + \mathcal{E},$$

где $\mathcal{E}$ — некоторая постоянная. Таким образом,

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m\, r_m(t) = -2Ct + \mathcal{E} \quad \text{при} \;\; t \in E. \tag{33}$$

Умножая равенство (28) на C, мы получаем, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C}{2^m}\, r_m(t) = -2Ct + C \quad \text{при} \;\; t \in M. \tag{34}$$

Из (33) и (34) вытекает, что

$$\mathcal{E} - C = \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m - \frac{C}{2^m} \right) r_m(t) \quad \text{при} \;\; t \in E \cap M, \tag{35}$$

где $m(E \cap M) = mE > 1/2$. В силу следствия 3 равенство (35) возможно лишь в случае, когда $\mathcal{E} = C$ и $a_m = C/2^m$ $(m = 1, 2, \dots)$. Значит, $F(t) = C(1-2t)$ и

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m\, r_m(t) = C \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_m(t)}{2^m} = C(1-2t)$$

почти всюду на $[0,1]$, что и требовалось доказать.

Аналогично (только ссылаясь на теорему 4 вместо следствия 3), можно доказать следующее предложение.

Теорема 7. *Пусть $F(t)$ — аналитическая функция на $(0,1)$, а ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m\, r_m(t) \tag{36}$$

сходится к $F(t)$ на множестве $E \subset [0,1]$ положительной меры. Тогда ряд (36) *сходится к некоторой функции $f(t)$ почти всюду на $[0,1]$. При этом:*

1) $F(t) = -2Ct + \mathcal{E}$, *где* C *и* $\mathcal{E}$ — *некоторые постоянные*;

2) $a_m = C/2^m$ *при всех* $m > m_0$;

3) $f(t) = \sum_{m=1}^{m_0} \left(a_m - C/2^m\right) r_m(t) + C(1-2t)$ *для почти всех* $t \in [0,1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бари Н.К.* Sur l'unicité du developpement trigonometrique // C. R. de l'Acad. des Sci. à Paris. 1923. V. 177. P. 1195–1197.
2. *Бари Н.К.* Проблема единственности разложения функции в тригонометрический ряд // Успехи матем. наук. 1949. Т. 4, вып. 3(31). С. 3–68.
3. *Бурстин Ц.* Аб аднэй асаблівай клясе трыгономэтрычных радоў. — Минск: Матэматычныя працы, 1932.
4. *Меньшов Д.Е.* Sur l'unicité du developpement trigonometrique // C. R. de l'Acad. des Sci. à Paris. 1916. V. 163. P. 433–436.
5. *Rajchman A.* Sur l'unicité du developpement trigonometrique // Fund. Math. 1921. V. III. P. 286–302.
6. *Steinhaus H.* Zur Konvergenzfrage bei dem Rademacher'schen Orthogonalsystem // Матем. сб. 1928. Т. 35, № 1. С. 39–42.
7. *Zygmund A.* On lacunary trigonometric series // Trans. Amer. Math. Soc. 1932. V. 34, № 3. P. 435–446.
8. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. — М.—Л., 1939.