СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ И СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ[*)]

Пусть $y(x) \in L_2[0,1]$. Положим

$$\varphi_0(x) = y(x), \qquad y_0 = \int_0^1 |\varphi_0(x)|\,dx,$$

$$\varphi_k(x) = |\varphi_{k-1}(x)| - y_{k-1}, \qquad y_k = \int_0^1 |\varphi_k(x)|\,dx \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Тогда справедлива формула

$$\int_0^1 y^2(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} y_k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^1 |\varphi_k(x)|\,dx \right)^2. \tag{1}$$

Эта формула связывает среднее квадратическое функции $y(x)$ со средним арифметическим функций $|\varphi_k(x)|$, весьма просто зависящих от $y(x)$.

Применяя тождество

$$\int_0^1 \varphi^2(x)\,dx = \left(\int_0^1 \varphi(x)\,dx \right)^2 + \int_0^1 \left(\varphi(x) - \int_0^1 \varphi(t)\,dt \right)^2 dx$$

к функциям $|\varphi_k(x)|$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, выводим, что

$$\int_0^1 \varphi_k^2(x)\,dx = y_k^2 + \int_0^1 \varphi_{k+1}^2(x)\,dx \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

откуда

$$\int_0^1 y^2(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} y_k^2 + \int_0^1 \varphi_n^2(x)\,dx\,, \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k^2 \leqslant \int_0^1 y^2(x)\,dx\,. \tag{3}$$

Остается показать, что для любой функции $y(x)$ это неравенство обращается в равенство, т.е. что

$$\int_0^1 \varphi_n^2(x)\,dx \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{4}$$

Для этого нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Пусть $p \geqslant 0$ и на множестве E, $\operatorname{mes} E = \delta > 0$, выполняется неравенство $|\varphi_p(x)| \geqslant M$. Тогда*

$$K_p = \sum_{k=p}^{\infty} y_k \geqslant M. \tag{5}$$

[*)] Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 2. С. 287–290 (*совм. с Б.С. Стечкиным*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что $K_p < M$, и придем к противоречию. Имеем на множестве E

$$\begin{aligned}
&\varphi_{p+1}(x) = |\varphi_p(x)| - y_p \geqslant M - y_p \geqslant M - K_p > 0,\\
&\varphi_{p+2}(x) = |\varphi_{p+1}(x)| - y_{p+1} \geqslant M - y_p - y_{p+1} \geqslant M - K_p > 0,\\
&\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad \varphi_n(x) \geqslant M - K_p > 0 \qquad (n = p+1, p+2, \ldots).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$y_n = \int_0^1 |\varphi_n(x)|\, dx \geqslant \int_E |\varphi_n(x)|\, dx \geqslant \delta(M - K_p) \qquad (n = p+1, p+2, \ldots),$$

что противоречит условию $y_n \to 0$ $(n \to \infty)$ (см. (3)). Неравенство (5) доказано.

Лемма 2. *Пусть* $0 \leqslant p \leqslant n$. *Положим* $\varepsilon_p = \max_{m \geqslant p} y_m$.

1) *Если в точке* $x_0 \in [0,1]$

$$|\varphi_p(x_0)| \geqslant \sum_{k=p}^{n} y_k,$$

то

$$|\varphi_{n+1}(x_0)| = |\varphi_p(x_0)| - \sum_{k=p}^{n} y_k.$$

2) *Если в точке* $x_0 \in [0,1]$

$$|\varphi_p(x_0)| < \sum_{k=p}^{n} y_k,$$

то

$$|\varphi_{n+1}(x_0)| \leqslant \varepsilon_p.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Имеем

$$\begin{aligned}
&\varphi_{p+1}(x_0) = |\varphi_p(x_0)| - y_p \geqslant \sum_{k=p+1}^{n} y_k \geqslant 0,\\
&\varphi_{p+2}(x_0) = |\varphi_{p+1}(x_0)| - y_{p+1} = |\varphi_p(x_0)| - (y_p + y_{p+1}) \geqslant \sum_{k=p+2}^{n} y_k \geqslant 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_{n+1}(x_0) = |\varphi_n(x_0)| - y_n = \varphi_n(x_0) - y_n = |\varphi_p(x_0)| - \sum_{k=p}^{n} y_k \geqslant 0,
\end{aligned}$$

т.е.

$$|\varphi_{n+1}(x_0)| = |\varphi_p(x_0)| - \sum_{k=p}^{n} y_k.$$

2) Найдем номер m $(p \leqslant m \leqslant n)$ такой, что

$$\sum_{k=p}^{m-1} y_k \leqslant |\varphi_p(x_0)| < \sum_{k=p}^{m} y_k.$$

Тогда согласно 1)

$$|\varphi_m(x_0)| = |\varphi_p(x_0)| - \sum_{k=p}^{m-1} y_k\,.$$

Далее имеем

$$\varphi_{m+1}(x_0) = |\varphi_m(x_0)| - y_m = |\varphi_p(x_0)| - \sum_{k=p}^{m} y_k < 0,$$

$$|\varphi_{m+1}(x_0)| \leqslant y_m \leqslant \varepsilon_p,$$
$$\varphi_{m+2}(x_0) = |\varphi_{m+1}(x_0)| - y_{m+1} \leqslant |\varphi_{m+1}(x_0)| \leqslant \varepsilon_p,$$
$$\varphi_{m+2}(x_0) \geqslant -y_{m+1} \geqslant -\varepsilon_p,$$

т.е.

$$|\varphi_{m+2}(x_0)| \leqslant \varepsilon_p,\ \ldots,\ |\varphi_{n+1}(x_0)| \leqslant \varepsilon_p,$$

и лемма доказана.

Переходим к доказательству соотношения (4). Рассмотрим два случая.

1-й случай. $\sup_x |\varphi_0(x)| = M_0 < \infty$[1)]. Тогда, очевидно, для любого $p \geqslant 0$ $\sup_x |\varphi_p(x)| = M_p < \infty$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть p настолько велико, что

$$\varepsilon_p = \max_{m \geqslant p} y_m \leqslant \varepsilon.$$

Согласно лемме 1 мы можем найти номер $n = n(\varepsilon)$, для которого

$$\sum_{k=p}^{n} y_k \geqslant M_p - \varepsilon_p\,.$$

Тогда по лемме 2 для почти всех x, для которых

$$|\varphi_p(x)| \geqslant \sum_{k=p}^{n} y_k\,,$$

выполняется неравенство

$$|\varphi_{n+1}(x)| = |\varphi_p(x)| - \sum_{k=p}^{n} y_k \leqslant M_p - (M_p - \varepsilon_p) = \varepsilon_p,$$

а для всех x, для которых

$$|\varphi_p(x)| < \sum_{k=p}^{n} y_k\,,$$

выполняется неравенство

$$|\varphi_{n+1}(x)| \leqslant \varepsilon_p\,.$$

Отсюда

$$\sup_x |\varphi_{n+1}(x)| \leqslant \varepsilon_p \leqslant \varepsilon, \qquad r_{n+1}^2 = \int_0^1 \varphi_{n+1}^2(x)\,dx \leqslant \varepsilon^2.$$

Так как, кроме того, $r_{n+1}^2 = y_{n+1}^2 + r_{n+2}^2 \geqslant r_{n+2}^2$, то $r_n^2 \to 0$ $(n \to \infty)$.

[1)] Здесь и ниже $\sup_x |\varphi(x)|$ обозначает существенную верхнюю грань функции $|\varphi(x)|$ на отрезке [0,1].

Отметим, что в этом случае $M_n \to 0$ $(n \to \infty)$ и для любого $n \geqslant 0$

$$\int_0^1 y^2(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} y_k^2 + \theta_n\, M_n^2 \qquad (0 \leqslant \theta_n \leqslant 1).$$

2-й случай. $\sup_x |\varphi_0(x)| = \infty$. Тогда для любого $p \geqslant 0$

$$\sup_x |\varphi_p(x)| = \infty.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем $p \geqslant 0$ и $N > 0$ такие, чтобы

$$\varepsilon_p \leqslant \varepsilon, \qquad \int_{|\varphi_p| \geqslant N} \varphi_p^2(x)\,dx \leqslant \varepsilon^2.$$

По лемме 1 для всех достаточно больших n имеем

$$K_{p,n} = \sum_{k=p}^{n} y_k > N.$$

Отсюда, как и выше,

$$r_{n+1}^2 = \int_0^1 \varphi_{n+1}^2(x)\,dx = \int_{|\varphi_p| \geqslant K_{p,n}} \varphi_{n+1}^2(x)\,dx + \int_{|\varphi_p| < K_{p,n}} \varphi_{n+1}^2(x)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{|\varphi_p| \geqslant N} \varphi_p^2(x)\,dx + \varepsilon_p^2 \leqslant 2\varepsilon^2,$$

и, следовательно, $r_n^2 \to 0$ $(n \to \infty)$.

Таким образом, в обоих случаях

$$\int_0^1 \varphi_n^2(x)\,dx \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

и формула (1) доказана.