О ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФЕЙЕРА*)

В работе выводятся новые оценки для уклонений периодической функции от ее сумм Фейера.

§ 1. Оценка для $\rho_n(f)$

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция с периодом 2π. Как обычно, через $E_n(f)$ $(n = 1, 2, \dots)$ будем обозначать наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка $n-1$, а через $\omega_k(\delta, f)$ — ее модуль непрерывности k-го порядка.

В этом параграфе выводится общая оценка для уклонений $\rho_n(f)$ функции $f(x) \in C$ от ее сумм Фейера $\sigma_n(f)$. Особенность этой оценки состоит в том, что она зависит от поведения последовательности наилучших приближений $\{E_\nu(f)\}$. При выводе этой оценки используются свойства сумм Валле Пуссена.

Как известно (см. [1] или [2]), суммами Валле Пуссена называются тригонометрические полиномы вида

$$\sigma_{n,m}(x,f) = \frac{1}{m+1}\sum_{\nu=n-m}^{n} s_\nu(x,f) \qquad (0 \leqslant m \leqslant n,\ n = 0,1,2,\dots), \tag{1.1}$$

где $s_\nu(x,f)$ — частичная сумма порядка ν ряда Фурье функции $f(x)$. Наиболее важное свойство сумм Валле Пуссена заключается в том, что

$$\big\|f - \sigma_{n,m}(f)\big\| \leqslant 2\,\frac{n+1}{m+1}\,E_{n-m+1}(f) \qquad (0 \leqslant m \leqslant n,\ n = 0,1,2,\dots). \tag{1.2}$$

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in C$. Тогда*

$$\rho_n(f) = \big\|f - \sigma_{n-1}(f)\big\| \leqslant \frac{B_1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} E_\nu(f) \qquad (n = 1,2,\dots), \tag{1.3}$$

где B_1 — абсолютная положительная константа.

Доказательство. Зафиксируем натуральное число n и найдем целое $p \geqslant 0$ из условий

$$2^p \leqslant n < 2^{p+1}. \tag{1.4}$$

Тогда можно записать

$$\sigma_{n-1}(f) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu(f) = \frac{1}{n}\Bigg\{s_0(f) + \sum_{\mu=1}^{p-1}\sum_{\nu=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1} s_\nu(f) + \sum_{\nu=2^{p-1}}^{n-1} s_\nu(f)\Bigg\},$$

где в случае $n = 1$ обе суммы справа являются пустыми. Поэтому

$$f - \sigma_{n-1}(f) = \frac{1}{n}\Bigg\{\big(f - s_0(f)\big) + \sum_{\mu=1}^{p-1}\sum_{\nu=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1}\big(f - s_\nu(f)\big) + \sum_{\nu=2^{p-1}}^{n-1}\big(f - s_\nu(f)\big)\Bigg\}. \tag{1.5}$$

*) Труды МИАН СССР. 1961. Т. ZXII. С. 48–60.

Выражая правую часть (1.5) через суммы Валле Пуссена и используя оценку (1.2), получаем

$$f-\sigma_{n-1}(f)=\frac{1}{n}\Big\{\big(f-\sigma_{0,0}(f)\big)+\sum_{\mu=1}^{p-1}2^{\mu-1}\big(f-\sigma_{2^\mu-1,2^{\mu-1}-1}(f)\big)+$$
$$+(n-2^{p-1})\big(f-\sigma_{n-1,n-2^{p-1}-1}(f)\big)\Big\},$$

$$\rho_n(f)=\big\|f-\sigma_{n-1}(f)\big\|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2}{n}\Big\{E_1(f)+\sum_{\mu=1}^{p-1}(2^\mu+2^{\mu-1}-1)E_{2^{\mu-1}}(f)+(2n-2^{p-1}-1)E_{n-2^{p-1}}(f)\Big\}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2}{n}\Big\{3E_1(f)+3\sum_{\mu=2}^{p-1}2^{\mu-1}E_{2^{\mu-1}}(f)+(2n-2^{p-1})E_{n-2^{p-1}}(f)\Big\}.$$

Но

$$2^{\mu-1}E_{2^{\mu-1}}(f)\leqslant 2\sum_{\nu=2^{\mu-2}+1}^{2^{\mu-1}}E_\nu(f)$$

и в силу (1.4)

$$(2n-2^{p-1})E_{n-2^{p-1}}(f)\leqslant\frac{2n-2^{p-1}}{n-2^{p-1}-2^{p-2}}\sum_{\nu=2^{p-2}+1}^{n-2^{p-1}}E_\nu(f)=$$
$$=\left(2+\frac{2^p}{n-2^{p-1}-2^{p-2}}\right)\sum_{\nu=2^{p-2}+1}^{n}E_\nu(f)\leqslant 6\sum_{\nu=2^{p-2}+1}^{n}E_\nu(f).$$

Отсюда

$$\rho_n(f)\leqslant\frac{2}{n}\Big\{3E_1(f)+6\sum_{\mu=2}^{p-1}\sum_{\nu=2^{\mu-2}+1}^{2^\mu-1}E_\nu(f)+6\sum_{\nu=2^{p-2}+1}^{n}E_\nu(f)\Big\}\leqslant\frac{12}{n}\sum_{\nu=1}^{n}E_\nu(f),$$

и теорема доказана с $B_1=12$.

Эта теорема остается справедливой для всех пространств L_p $(1\leqslant p<\infty)$. Доказательство не меняется.

Наилучшее значение константы B_1 в неравенстве (1.3) нам неизвестно; по-видимому, найти его довольно трудно.

Было бы интересно получить аналогичные оценки уклонений для других методов суммирования рядов Фурье.

Отметим одно следствие из теоремы 1.

Следствие. *Пусть $f(x)\in C$. Тогда для любого натурального k*

$$\rho_n(f)\leqslant\frac{B_2(k)}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\omega_k\Big(\frac{1}{\nu},\,f\Big)\qquad(n=1,2,\ldots),\tag{1.6}$$

где константа $B_2(k)$ зависит только от k.

Для доказательства достаточно воспользоваться обобщенной теоремой Джексона (см. [3]), согласно которой

$$E_n(f) \leqslant B_3(k)\,\omega_k\Big(\frac{1}{n}, f\Big) \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{1.7}$$

Для случаев $k = 1$ и $k = 2$ неравенство (1.6) нетрудно было бы также вывести из результатов С.М. Никольского [4] и М.И. Морозова [5].

Пусть $\omega(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ — положительная функция и $H_k(\omega)$ — класс непрерывных периодических функций $f(x)$, для которых

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant \omega(\delta) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Используя оценку (1.6), формулу

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{2}{\pi n}\int_{-\infty}^{+\infty}\{f(x+t) - f(x)\}\frac{\sin^2(nt/2)}{t^2}dt$$

и известные свойства модулей непрерывности (см. [3, 6]), немедленно выводим, что

$$\rho_n[H_1(\omega)] = \sup_{f\in H_1(\omega)} \rho_n(f) \sim \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\omega_1^{**}\Big(\frac{1}{\nu}\Big), \tag{1.8}$$

где

$$\omega_1^{**}(\delta) = \delta \inf_{0<\eta\leqslant\delta}\{\eta^{-1}\inf_{\eta\leqslant\zeta\leqslant\pi}\omega(\zeta)\} \tag{1.9}$$

— исправленная мажоранта первого порядка для функции $\omega(\delta)$.

Аналогичную формулу для $\rho_n[H_k(\omega)]$ при $k \geqslant 2$ нам получить не удалось.

Пусть $F = \{F_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$, где $F_n \downarrow 0$. Обозначим через $C(F)$ класс непрерывных функций $f(x)$ с периодом 2π, для которых

$$E_n(f) \leqslant F_n \qquad (n = 1, 2, \dots), \tag{1.10}$$

и определим точный порядок убывания верхней грани

$$\rho_n[C(F)] = \sup_{f\in C(F)} \rho_n(f).$$

Теорема 2. *Для любого класса* $C(F)$

$$\rho_n[C(F)] \sim \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu \qquad (n = 1, 2, \dots), \tag{1.11}$$

точнее,

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu \leqslant \rho_n[C(F)] \leqslant \frac{B_1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu. \tag{1.12}$$

Доказательство. В силу теоремы 1, если $f \in C(F)$, то

$$\rho_n(f) \leqslant \frac{B_1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} E_\nu(f) \leqslant \frac{B_1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu,$$

откуда

$$\rho_n[C(F)] \leqslant \frac{B_1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{1.13}$$

Остается установить неравенство

$$\rho_n[C(F)] \geqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu \qquad (n=1,2,\dots). \tag{1.14}$$

Мы докажем несколько более сильное утверждение, а именно, что существует функция $f_1(x) \in C(F)$, не зависящая от n, для которой

$$\rho_n(f_1) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu \quad (n=1,2,\dots). \tag{1.15}$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где $a_n \geqslant 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Очевидно

$$E_n(f) \leqslant \big\|f - s_{n-1}(f)\big\| \leqslant \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \qquad (n=1,2,\dots), \tag{1.16}$$

$$\rho_n(f) = \big\|f - \sigma_{n-1}(f)\big\| = \frac{1}{n}\Big\|\sum_{\nu=0}^{n-1}\big(f - s_\nu(f)\big)\Big\| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}\big\|f - s_\nu(f)\big\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} a_\mu = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=\nu}^{\infty} a_\mu = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu. \tag{1.17}$$

С другой стороны,

$$\rho_n(f) \geqslant f(0) - \sigma_{n-1}(0,f) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n-1}\Big(1 - \frac{\nu}{n}\Big)a_\nu = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu.$$

Сопоставляя это неравенство с (1.17), получаем, что

$$\rho_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu \qquad (n=1,2,\dots). \tag{1.18}$$

Положим теперь

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (F_n - F_{n+1}) \cos nx.$$

Тогда

$$E_n(f_1) \leqslant F_n \qquad (n=1,2,\dots),$$

так что $f_1 \in C(F)$ и

$$\rho_n(f_1) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu \qquad (n=1,2,\dots). \tag{1.19}$$

Этим установлено равенство (1.15), и теорема полностью доказана.

Отметим, что наше доказательство оценки снизу проходит только для приближений в метрике C.

Из (1.15) и (1.19) вытекает, что

$$\rho_n(f_1) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} E_\nu(f_1) \quad (n=1,2,\ldots). \tag{1.20}$$

Отсюда в свою очередь следует, что если обозначить наилучшую константу в неравенстве (1.3) через $B_1(n)$, то при любом $n = 1, 2, \ldots$

$$12 \geqslant B_1(n) \geqslant 1. \tag{1.21}$$

Нетрудно также доказать, что $B_1(1) = 2$.

§ 2. Оценка для $\rho_n(\widetilde{f}\,)$

Пусть $f(x) \in C$. Через $\widetilde{f}(x)$ мы будем обозначать функцию, тригонометрически сопряженную с $f(x)$. Предполагая, что $f(x) \in C$ и $\widetilde{f}(x) \in C$, мы выведем здесь общую оценку для уклонений $\rho_n(\widetilde{f}\,)$.

При доказательстве будут использованы свойства сумм Валле Пуссена. Кроме того, мы будем опираться на теорему Алексича и на теорему, доказанную ранее автором [3].

Теорема A. *Пусть $\widetilde{f}'(x)$ ограничена. Тогда*

$$\rho_n(f) \leqslant \frac{C}{n}\,\big\|\widetilde{f}'(x)\big\|.$$

Теорема B. *Пусть k — натуральной число, $f(x) \in C$ и тригонометрический полином $t_n(x)$ порядка n удовлетворяет условию*

$$\big\|f(x) - t_n(x)\big\| \leqslant B_4(k)\,\omega_k\Big(\frac{1}{n},\,f\Big). \tag{2.1}$$

Тогда

$$\big\|t_n^{(k)}(x)\big\| \leqslant B_5(k)\,n^k\,\omega_k\Big(\frac{1}{n},\,f\Big). \tag{2.2}$$

Теорема 3. *Пусть $f(x) \in C$, $\widetilde{f}(x) \in C$. Тогда*

$$\rho(\widetilde{f}\,) = \big\|\widetilde{f}(x) - \sigma_{n-1}(\widetilde{f}\,)\big\| \leqslant B_6\Big(\omega\Big(\frac{1}{n}, f\Big) + E_{n+1}(\widetilde{f}\,)\Big) \qquad (n=1,2,\ldots). \tag{2.3}$$

Доказательство. Ради сокращения записи положим

$$T_{2n}(x) = \sigma_{2n,n}(x,f) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=n}^{2n} s_\nu(x,f)$$

и отметим, что в силу (1.2)

$$\big\|f(x) - T_{2n}(x)\big\| \leqslant 4E_{n+1}(f). \tag{2.4}$$

Имеем

$$\big\|\widetilde{f} - \sigma_{n-1}(\widetilde{f}\,)\big\| \leqslant$$
$$\leqslant \big\|\widetilde{f} - T_{2n}(\widetilde{f}\,)\big\| + \big\|\sigma_{n-1}(\widetilde{f} - T_{2n}(\widetilde{f}\,))\big\| + \big\|T_{2n}(\widetilde{f}\,) - \sigma_{n-1}(T_{2n}(\widetilde{f}\,))\big\|. \tag{2.5}$$

Здесь в силу (2.4)

$$\big\|\widetilde{f} - T_{2n}(\widetilde{f}\,)\big\| \leqslant 4E_{n+1}(\widetilde{f}\,), \tag{2.6}$$

а так как, кроме того, для любой функции $\varphi \in C$

$$\|\sigma_{n-1}(\varphi)\| \leqslant \|\varphi\|,$$

то

$$\|\sigma_{n-1}(\widetilde{f} - T_{2n}(\widetilde{f}))\| \leqslant \|\widetilde{f} - T_{2n}(\widetilde{f})\| \leqslant 4E_{n+1}(\widetilde{f}). \tag{2.7}$$

Далее, пользуясь теоремой A, получаем

$$\|T_{2n}(\widetilde{f}) - \sigma_{n-1}(T_{2n}(\widetilde{f}))\| = \|T_{2n}(\widetilde{f}) - \sigma_{n-1}(T_{2n}(\widetilde{f}))\| \leqslant \frac{C}{n}\|T'_{2n}(f)\|. \tag{2.8}$$

Но в силу (2.4) и теоремы Джексона

$$\|f - T_{2n}(f)\| \leqslant B_3\,\omega\Big(\frac{1}{n}, f\Big) \leqslant 2B_3\,\omega\Big(\frac{1}{2n}, f\Big).$$

Сопоставляя это неравенство с теоремой B, выводим, что

$$\|T'_{2n}(x)\| \leqslant B_7 2n\,\omega\Big(\frac{1}{2n}, f\Big) \leqslant B_8 n\,\omega\Big(\frac{1}{n}, f\Big).$$

Отсюда и из (2.8) получаем

$$\|T_{2n}(\widetilde{f}) - \sigma_{n-1}(T_{2n}(\widetilde{f}))\| \leqslant B_9\,\omega\Big(\frac{1}{n}, f\Big). \tag{2.9}$$

Наконец, из (2.5)–(2.7) и (2.9) вытекает, что

$$\|\widetilde{f} - \sigma_{n-1}(\widetilde{f})\| \leqslant B_6\Big\{\omega\Big(\frac{1}{n}, f\Big) + E_{n+1}(\widetilde{f})\Big\},$$

и теорема доказана.

Наше доказательство проходит для любого пространства L_p $(p \geqslant 1)$.

Отметим несколько следствий.

Следствие 1. *Пусть* $f(x) \in C$, $\widetilde{f}(x) \in C$. *Тогда*

$$\rho_n(f) = \|f - \sigma_{n-1}(f)\| \leqslant B_6\Big\{E_{n+1}(f) + \omega\Big(\frac{1}{n}, \widetilde{f}\Big)\Big\} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.10}$$

Пользуемся симметрией, существующей между функциями f и $\widetilde{f}$.

Следствие 2. *Пусть* $f(x) \in C$ *и сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} E_n(f). \tag{2.11}$$

Тогда

$$\rho_n(\widetilde{f}) \leqslant B_{10}\Big\{\omega\Big(\frac{1}{n}, f\Big) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} E_\nu(f)\Big\} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.12}$$

В самом деле, как доказано в моей работе [7], если сходится ряд (2.11), то $\widetilde{f}(x) \in C$ и

$$E_n(\widetilde{f}) \leqslant B_{11}\Big\{E_n(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} E_\nu(f)\Big\} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.13}$$

Используя (2.13) и теорему 3, получаем

$$\rho_n(\widetilde{f}) \leqslant B_{12}\Big\{\omega\Big(\frac{1}{n}, f\Big) + E_{n+1}(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} E_\nu(f)\Big\}.$$

Но по теореме Джексона $E_{n+1}(f) \leqslant B_3\,\omega\big(1/n, f\big)$, откуда и следует (2.12).

Следствие 3. *Пусть k — натуральное число, $f(x) \in C$ и сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,\omega_k\Big(\frac{1}{n}, f\Big). \tag{2.14}$$

Тогда

$$\rho_n(\widetilde{f}\,) \leqslant B_{13}(k)\Big\{\omega\Big(\frac{1}{n}, f\Big) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\,\omega_k\Big(\frac{1}{\nu}, f\Big)\Big\}. \tag{2.15}$$

Пользуемся обобщенной теоремой Джексона (1.7). Здесь наиболее интересен случай $k = 2$.

В случае $k = 1$ предыдущее утверждение можно несколько усилить.

Следствие 4. *Пусть $f(x) \in C$ и сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,\omega\Big(\frac{1}{n}, f\Big). \tag{2.16}$$

Тогда

$$\rho_n(\widetilde{f}\,) \leqslant B_{14}(k) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\,\omega\Big(\frac{1}{\nu}, f\Big). \tag{2.17}$$

Полагая в (2.15) $k = 1$, получаем, что

$$\rho_n(\widetilde{f}\,) \leqslant B_{13}\Big\{\omega\Big(\frac{1}{n}, f\Big) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\,\omega\Big(\frac{1}{\nu}, f\Big)\Big\}. \tag{2.18}$$

Но так как $\omega(\delta, f)\uparrow$ и $\omega(\delta/2, f) \geqslant (1/2)\,\omega(\delta, f)$, то

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\,\omega\Big(\frac{1}{\nu}, f\Big) \geqslant \sum_{\nu=n+1}^{2n} \frac{1}{\nu}\,\omega\Big(\frac{1}{\nu}, f\Big) \geqslant \omega\Big(\frac{1}{2n}, f\Big) \sum_{\nu=n+1}^{2n} \frac{1}{\nu} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\,\omega\Big(\frac{1}{n}, f\Big) \sum_{\nu=n+1}^{2n} \frac{1}{\nu} \geqslant B_{15}\,\omega\Big(\frac{1}{n}, f\Big).$$

Отсюда и из (2.18) получаем (2.17).

Это следствие позволяет определить точный порядок убывания верхней грани $\rho_n\big[\widetilde{H}[\omega]\big]$. Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. *Пусть функция $\omega(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ удовлетворяет следующим условиям:*

$$\omega(\delta) > 0 \quad (0 < \delta \leqslant \pi), \quad \omega(\delta) \to 0 \quad (\delta \to +0), \quad \omega(\delta)\uparrow, \quad \delta^{-1}\,\omega(\delta)\downarrow. \tag{2.19}$$

Тогда существует последовательность $\{A_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ такая, что:

1) $n\,\omega\Big(\dfrac{1}{n}\Big) \leqslant A_n \leqslant 2n\,\omega\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

2) $A_0 = 0$, $A_n\uparrow$;

3) $\Delta^2 A_n = A_{n+2} - 2A_{n+1} + A_n \leqslant 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Ради удобства будем считать, что

$$n\,\omega\Big(\frac{1}{n}\Big) = 0 \quad \text{при} \quad n = 0.$$

Для последовательности точек на плоскости с координатами $(n, n\omega(1/n))$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ построим минимальную вогнутую мажоранту (n, A_n) $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Так как в силу условий (2.19) $n\,\omega(1/n) = o(n)$, то такая мажоранта заведомо существует. Точки (n, A_n) представляют собой вершины бесконечнозвенной ломаной, причем

$$A_0 = 0, \quad A_n \uparrow, \quad \Delta^2 A_n \leqslant 0, \quad A_n \geqslant n\,\omega\Big(\frac{1}{n}\Big) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.20}$$

Кроме того, точками излома этой ломаной могут быть лишь точки (n_k, A_{n_k}), для которых

$$A_{n_k} = n_k\,\omega\Big(\frac{1}{n_k}\Big) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.21}$$

Мы будем считать, что через $\{n_k\}$ обозначена последовательность целых неотрицательных чисел, состоящая из *всех* точек, для которых выполняется условие (2.21), так что, в частности, $n_0 = 0$.

Покажем, что

$$A_n \leqslant 2n\,\omega\Big(\frac{1}{n}\Big) \qquad (n_{k-1} \leqslant n \leqslant n_k). \tag{2.22}$$

В силу линейности последовательности $\{A_n\}$ для $n_{k-1} \leqslant n \leqslant n_k$ имеем

$$A_n = \frac{n_k - n}{n_k - n_{k-1}} A_{n_{k-1}} + \frac{n - n_{k-1}}{n_k - n_{k-1}} A_{n_k} =$$

$$= \frac{n_k - n}{n_k - n_{k-1}} n_{k-1}\,\omega\Big(\frac{1}{n_{k-1}}\Big) + \frac{n - n_{k-1}}{n_k - n_{k-1}} n_k\,\omega\Big(\frac{1}{n_k}\Big) \qquad (n_{k-1} \leqslant n \leqslant n_k).$$

Но в силу (2.19)

$$n_{k-1}\,\omega\Big(\frac{1}{n_{k-1}}\Big) \leqslant n\,\omega\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad \omega\Big(\frac{1}{n_k}\Big) \leqslant \omega\Big(\frac{1}{n}\Big) \qquad (n_{k-1} \leqslant n \leqslant n_k).$$

Отсюда

$$A_n \leqslant \frac{n_k - n}{n_k - n_{k-1}} n\,\omega\Big(\frac{1}{n}\Big) + \frac{n - n_{k-1}}{n_k - n_{k-1}} n_k\,\omega\Big(\frac{1}{n}\Big) =$$

$$= \frac{1}{n_k - n_{k-1}}\Big\{n_k - n + \frac{n_k}{n}(n - n_{k-1})\Big\} n\,\omega\Big(\frac{1}{n}\Big) =$$

$$= \frac{2n_k - n - n_k n_{k-1}/n}{n_k - n_{k-1}} n\,\omega\Big(\frac{1}{n}\Big) \qquad (n_{k-1} \leqslant n \leqslant n_k).$$

Далее, как нетрудно подсчитать,

$$n + \frac{n_k n_{k-1}}{n} \geqslant 2\sqrt{n_{k-1} n_k} \qquad (n_{k-1} \leqslant n \leqslant n_k).$$

Поэтому

$$A_n \leqslant 2\frac{n_k - \sqrt{n_{k-1} n_k}}{n_k - n_{k-1}}\, n\,\omega\Big(\frac{1}{n}\Big) = 2\frac{\sqrt{n_k}}{\sqrt{n_k} + \sqrt{n_{k-1}}}\, n\,\omega\Big(\frac{1}{n}\Big) \leqslant 2n\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

$$(n_{k-1} \leqslant n \leqslant n_k).$$

Отсюда следует, что

$$A_n \leqslant 2n\,\omega\Big(\frac{1}{n}\Big) \quad (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

Сопоставляя это с (2.20), убеждаемся, что лемма полностью доказана.

Лемма 2. *Пусть функция $\omega(\delta)$ $(0<\delta\leqslant\pi)$ удовлетворяет условиям (2.19) и, кроме того,*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)<\infty. \tag{2.23}$$

Тогда существует функция $f_2(x)\in C$, обладающая следующими свойствами:

1) $\omega(\delta,f_2)\leqslant\omega(\delta)\quad(0<\delta\leqslant\pi)$;

2) $\rho_n(\widetilde{f}_2)\geqslant B_{16}\displaystyle\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\,\omega\Big(\frac{1}{\nu}\Big)$ $(n=1,2,\ldots)$, *где B_{16} — абсолютная положительная константа.*

Доказательство. Для функции $\omega(\delta)$ построим последовательность $\{A_n\}$ $(n=0,1,2,\ldots)$, как указано в предыдущей лемме, и положим

$$f_3(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n-A_{n-1}}{n}\sin nx. \tag{2.24}$$

Так как $\Delta^2A_n\leqslant 0$ и $A_n=o(n)$, то

$$G_n=A_n-A_{n-1}\downarrow 0.$$

Как хорошо известно (см., например, [8]), отсюда вытекает, что

$$E_n(f_3)\leqslant B_{17}G_n=B_{17}(A_n-A_{n-1}).$$

Отсюда в силу теоремы 8 работы автора [3] имеем

$$\omega\Big(\frac{1}{n},f_3\Big)\leqslant\frac{B_{18}}{n}\sum_{\nu=1}^{n}E_\nu(f_3)\leqslant\frac{B_{19}}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(A_\nu-A_{\nu-1})=\frac{B_{19}}{n}A_n.$$

Учитывая свойство 1) последовательности $\{A_n\}$ (см. [3]), выводим

$$\omega\Big(\frac{1}{n},f_3\Big)\leqslant B_{20}\,\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)\quad(n=1,2,\ldots),$$

и, следовательно (см. [3]),

$$\omega(\delta,f_3)\leqslant B_{21}\omega(\delta)\quad(0<\delta\leqslant\pi). \tag{2.25}$$

Оценим теперь снизу $\rho_n(\widetilde{f}_3)$. Имеем

$$\widetilde{f}_3(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n-A_{n-1}}{n}\cos nx.$$

Отсюда, как и при доказательстве теоремы 2,

$$\rho_n(\widetilde{f}_3)=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(A_\nu-A_{\nu-1})+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{A_\nu-A_{\nu-1}}{\nu}=$$
$$=\frac{A_n}{n}-\frac{A_n}{n+1}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}A_\nu\Big(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\Big)=\sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{A_\nu}{\nu(\nu+1)}.$$

Но $A_n\geqslant n\,\omega(1/n)$. Поэтому

$$\rho_n(\widetilde{f}_3)\geqslant\sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{1}{\nu+1}\,\omega\Big(\frac{1}{\nu}\Big)\geqslant\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\,\omega\Big(\frac{1}{\nu}\Big). \tag{2.26}$$

Наконец, полагая

$$f_2 = \frac{1}{B_{21}} f_3,$$

выводим из (2.25) и (2.26)

$$\omega(\delta, f_2) \leqslant \omega(\delta) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi),$$

$$\rho_n(\widetilde{f}_2) \geqslant \frac{1}{B_{21}} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\, \omega\Big(\frac{1}{\nu}\Big).$$

Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть* $\omega(\delta) > 0 \ \ (0 < \delta \leqslant \pi)$,

$$\omega^{**}(\delta) = \delta \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \{\eta^{-1} \inf_{\eta\leqslant\xi\leqslant\pi} \omega(\xi)\} \qquad (0 < \delta \leqslant \pi) \tag{2.27}$$

— *исправленная мажоранта для функции* $\omega(\delta)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, \omega^{**}\Big(\frac{1}{n}\Big) < \infty. \tag{2.28}$$

Тогда

$$\rho_n\big[\widetilde{H}[\omega]\big] \sim \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \omega^{**}\Big(\frac{1}{\nu}\Big) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.29}$$

Условие (2.28) существенно, так как в противном случае из $f \in H[\omega]$ не вытекает непрерывность сопряженной функции $\widetilde{f}$. Понятно, что его можно было бы заменить более простым, но не более ограничительным условием

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, \omega\Big(\frac{1}{n}\Big) < \infty. \tag{2.30}$$

Доказательство. В моей работе [6] доказано, что если $f(x) \in H[\omega]$, т. е.

$$\omega(\delta, f) \leqslant \omega(\delta) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi),$$

то

$$\omega(\delta, f) \leqslant 2\omega^{**}(\delta) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi). \tag{2.31}$$

Кроме того, там же доказано, что всегда

$$0 \leqslant \omega^{**}(\delta) \leqslant \omega(\delta), \quad \omega^{**}(\delta)\uparrow, \quad \delta^{-1}\,\omega^{**}(\delta)\downarrow. \tag{2.32}$$

Сопоставляя следствие 4 с неравенством (2.31), выводим, что для любой функции $f \in H[\omega]$

$$\rho_n(\widetilde{f}\,) \leqslant B_{14} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\, \omega\Big(\frac{1}{\nu}, f\Big) \leqslant 2B_{14} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\, \omega^{**}\Big(\frac{1}{\nu}\Big),$$

откуда

$$\rho_n\big[\widetilde{H}[\omega]\big] \leqslant B_{22} \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu} \omega^{**}\Big(\frac{1}{\nu}\Big) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.33}$$

Далее в силу (2.32) исправленная мажоранта $\omega^{**}(\delta)$ есть либо тождественный нуль, либо она удовлетворяет условиям (2.19). Пользуясь леммой 2 и учитывая

(2.31), выводим, что в обоих случаях существует функция $f_2(x) \in H[\omega^{**}] \subset H[\omega]$, для которой

$$\rho_n(\widetilde{f}\,) \geqslant C_1 \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu}\, \omega^{**}\Big(\frac{1}{\nu}\Big) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

где C_1 — абсолютная положительная константа. Отсюда

$$\rho_n\big[\widetilde{H}[\omega]\big] \geqslant C_1 \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu}\, \omega^{**}\Big(\frac{1}{\nu}\Big) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.34}$$

Наконец, сопоставляя (2.33) и (2.34), получаем, что

$$\rho_n\big[\widetilde{H}[\omega]\big] \sim \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu}\, \omega^{**}\Big(\frac{1}{\nu}\Big),$$

и теорема доказана.

В частности, если мажоранта $\omega(\delta)$ удовлетворяет условиям (2.19), то $\omega^{**}(\delta) = \omega(\delta)$, и, следовательно,

$$\rho_n\big[\widetilde{H}[\omega]\big] \sim \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu}\, \omega\Big(\frac{1}{\nu}\Big). \tag{2.35}$$

В заключение отметим, что рассуждение, примененное для доказательства теоремы 3, носит совершенно общий характер. Точно таким же путем устанавливается справедливость следующих предложений.

Теорема 5. *Пусть k — натуральное число и U_n $(n = 1, 2, \ldots)$ есть линейный метод приближения функций, обладающий следующими свойствами*:

1) *для любой функции $f(x) \in C$*

$$\|U_n(f)\| \leqslant M_0\|f\|;$$

2) *для любой функции $f(x) \in C$, для которой $f^{(k)}(x) \in C$,*

$$\|f - U_n(f)\| \leqslant \frac{M_k}{n^k}\, \|f^{(k)}\| \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда для любой функции $f(x) \in C$

$$\|f - U_n(f)\| \leqslant B_{23}(k)(M_0 + M_k)\, \omega_k\Big(\frac{1}{n}, f\Big).$$

Теорема 6. *Пусть k — натуральное число и линейный метод приближения U_n $(n = 1, 2, \ldots)$ обладает свойствами* 1) *и*

3) *если $f^{(k)}(x) \in C$, то*

$$\big\|\widetilde{f} - U_n(\widetilde{f}\,)\big\| \leqslant \frac{M_k}{n^k}\, \|f^{(k)}\| \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда для любой функции $f(x) \in C$, $\widetilde{f}(x) \in C$

$$\big\|\widetilde{f} - U_n(\widetilde{f}\,)\big\| \leqslant B_{24}(k)(M_0 + M_k)\Big\{\omega_k\Big(\frac{1}{n}, f\Big) + E_{n+1}(\widetilde{f}\,)\Big\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *de la Vallée Poussin Ch. J.* Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. — Paris, 1919.
2. *Стечкин С.Б.* О суммах Валле Пуссена // Докл. АН СССР. 1951. Т. 80, № 4. С. 545–548.
3. *Стечкин С.Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15. С. 212–242.
4. *Никольский С.М.* Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4. С. 501–508.
5. *Морозов М.И.* К вопросу о приближении периодических квазигладких функций и функций, удовлетворяющих условию Липшица // Труды Моск. авиац. ин-та. 1956. Вып. 61. С. 41–57.
6. *Стечкин С.Б.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье. II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1955. Т. 19. С. 221–246.
7. *Стечкин С.Б.* О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. Т. 20. С. 197–206.
8. *Бари Н.К.* О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1955. Т. 19. С. 285–302.