О НАИЛУЧШИХ ЛАКУНАРНЫХ СИСТЕМАХ ФУНКЦИЙ [*)]

Введение

Пусть $\{f_k(x)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — конечная или бесконечная система действительных линейно независимых функций, заданная на пространстве E с мерой μ. Пусть, далее, заданы числа $p > 2$ и $M > 0$. Систему $\{f_k(x)\}$ будем называть $S_p(M)$-*лакунарной*, если $f_k(x) \in L^2(E)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и для любого натурального N и любых действительных чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_N$ справедливо неравенство

$$\left\|\sum_{k=1}^{N} a_k f_k(x)\right\|_p \leqslant M \left\|\sum_{k=1}^{N} a_k f_k(x)\right\|_2, \tag{0.1}$$

где

$$\|f(x)\|_q = \left(\int_E |f(x)|^q\,dx\right)^{1/q} \qquad (q > 0).$$

В частности, если система $\{f_k(x)\}$ конечна и состоит из n функций, то условие (0.1) можно записать в форме

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k\ f_k(x)\right\|_p \leqslant M \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k\ f_k(x)\right\|_2 \tag{0.2}$$

для любых $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$. В случае, когда система $\{f_k(x)\}$ является ортонормированной, наше определение совпадает с обычным определением S_p-лакунарных систем (см. [2, гл. VII]) [1)].

В этой работе изучается вопрос о том, при каком наименьшем значении $M = M_p^*(n)$ существует система $\{f_k(x)\}$, состоящая из n функций и удовлетворяющая условию (0.2). Очевидно, ответ на этот вопрос зависит от значения $\mu(E)$ и без ограничения общности можно предположить, что

$$\mu(E) = 1.$$

Мы показываем здесь, что при соблюдении этой нормировки

$$M_p^*(n) = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)}\right)^{1/p}\sqrt{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{0.3}$$

строим систему функций $\{\alpha_k(s)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, для которой M принимает значение $M_p^*(n)$, и изучаем некоторые свойства этой наилучшей лакунарной системы.

Кроме того, в работе устанавливается, что при $p = 2m$ $(m = 2, 3, \ldots)$ известная система Радемахера является одной из наилучших лакунарных систем среди всевозможных бесконечных систем функций [2)]. Вопрос о том, обладает ли система Радемахера этим свойством для других $p > 2$, остается открытым.

---

*) Изв. АН СССР. Сер. матем. 1961. Т. 25, № 3. С. 357–366.

1) Точнее, $S_p = \cup_{M>0} S_p(M)$.

2) Этот результат принадлежит Л.В. Тайкову.

§ 1. Новая лакунарная система функций

Пусть $\mathbb{R}^n$ есть n-мерное евклидово пространство, состоящее из точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, S^n $(\sum_{k=1}^n x_k^2 = 1)$ — единичная сфера этого пространства и

$$\mu_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \tag{1.1}$$

— площадь сферы S^n. Обозначим через $d\sigma$ элемент площади сферы S^n и на множестве $E_n = S^n$ с мерой $ds = d\sigma/\mu_n$ построим систему n линейно независимых функций

$$\alpha_1(s), \quad \alpha_2(s), \quad \dots, \quad \alpha_n(s) \qquad (s \in E_n),$$

полагая в точке $s = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\alpha_k(s) = x_k$. Таким образом,

$$\{\alpha_k(s)\} \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

есть система направляющих косинусов внешней нормали $n(s)$ к сфере S^n в точке s.

Очевидно, система $\{\alpha_k(s)\}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ ортогональна. Кроме того, поскольку значение интеграла

$$\int_{E_n} \alpha_k^2(s)\, ds$$

не зависит от k и

$$\sum_{k=1}^n \int_{E_n} \alpha_k^2(s)\, ds = \int_{E_n} \sum_{k=1}^n x_k^2\, ds = \int_{E_n} ds = 1,$$

имеем

$$\|\alpha_k(s)\|_2 = \left(\int_{E_n} \alpha_k^2(s)\, ds \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Покажем, что система $\{\alpha_k(s)\}$ является $S_p(M)$-лакунарной для любого $p > 2$, и подсчитаем для нее соответствующую константу лакунарности M.

Теорема 1. *Пусть $0 < p_0 < p$. Тогда для любых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ справедливо равенство*

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k\, \alpha_k(s) \right\|_p = \frac{K_p(n)}{K_{p_0}(n)} \left\| \sum_{k=1}^n a_k\, \alpha_k(s) \right\|_{p_0}, \tag{1.2}$$

где

$$K_p(n) = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)} \right)^{1/p}. \tag{1.3}$$

Доказательство. Прежде всего подсчитаем интеграл $\int_{E_n} |x_n|^p\, ds$ при $p > 0$, $n \geqslant 2$. Так как

$$ds = \frac{dx_1 \dots dx_{n-1}}{\mu_n |x_n|},$$

то

$$\int_{E_n} |x_n|^p\, ds = \frac{2}{\mu_n} \int^{n-1}_{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leqslant 1} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \right)^{(p-1)/2} dx_1 \dots dx_{n-1},$$

откуда по формуле Лиувилля (см. [3, § 650]) получаем

$$\int_{E_n} |x_n|^p \, ds = \frac{2}{\mu_n} \cdot \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^1 r^{n-2} \, (1-r^2)^{(p-1)/2} \, dr.$$

Подставляя в это равенство значение μ_n из (1.1) и учитывая, что

$$\int_0^1 r^{n-2} \, (1-r^2)^{(p-1)/2} \, dr = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)},$$

находим

$$\int_{E_n} |x_n|^p \, ds = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)} \qquad (p > 0, \ \ n \geqslant 2). \tag{1.4}$$

Подсчитаем теперь величину $\| \sum_{k=1}^n a_k \, \alpha_k(s) \|_p$ при $p > 0$, $n \geqslant 2$. Для этого заметим, что если $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то

$$\sum_{k=1}^n a_k \, \alpha_k(s) = \big(a, n(s)\big).$$

Отсюда видно, что

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k \, \alpha_k(s) \right\|_p^p = \int_{E_n} \big|\big(a, n(s)\big)\big|^p \, ds$$

не зависит от направления вектора a, а зависит лишь от его длины. Следовательно,

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k \, \alpha_k(s) \right\|_p^p = |a|^p \int_{E_n} \big|\big(e_n, n(s)\big)\big|^p \, ds,$$

где e_n — единичный вектор по оси x_n, т.е.

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k \, \alpha_k(s) \right\|_p^p = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{p/2} \int_{E_n} |x_n|^p \, ds,$$

откуда в силу (1.4) имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k \, \alpha_k(s) \right\|_p = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)} \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} = K_p(n) \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} \qquad (n \geqslant 2).$$

Сопоставляя эти равенства для p_0 и p, получаем

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k \, \alpha_k(s) \right\|_p = \frac{K_p(n)}{K_{p_0}(n)} \left\| \sum_{k=1}^n a_k \, \alpha_k(s) \right\|_{p_0} \qquad (n \geqslant 2).$$

Поскольку в случае $n = 1$ результат тривиален, теорема доказана.

Так как $K_2(n) = 1/\sqrt{n}$, то, в частности,

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k \, \alpha_k(s) \right\|_p = K_p(n)\sqrt{n} \left\| \sum_{k=1}^n a_k \, \alpha_k(s) \right\|_2 \qquad (p > 0). \tag{1.5}$$

Эта формула показывает, что система $\{\alpha_k(s)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ обладает следующим замечательным свойством: *норма любого полинома по системе $\{\alpha_k(s)\}$ в смысле $L_p(E_n)$ $(p > 0)$ однозначно определяется его нормой в метрике $L_2(E_n)$.*

§ 2. Подсчет $M_p^*(n)$

В этом параграфе определяется точное значение константы $M_p^*(n)$.

Теорема 2. *Пусть функции $f_k(x)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ линейно независимы, $p>0$, $f_k(x)\in L_2(E)$, $\mu(E)=1$. Если для любых чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ справедливо неравенство*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k\, f_k(x)\right\|_p \leqslant M_p(n)\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k\, f_k(x)\right\|_2 \tag{2.1}$$

для некоторого $p>2$, то

$$M_p(n)\geqslant \frac{K_p(n)}{K_2(n)}=K_p(n)\sqrt{n}. \tag{2.2}$$

Если же для любых $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ справедливо неравенство

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k\, f_k(x)\right\|_p \geqslant M_p(n)\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k\, f_k(x)\right\|_2 \tag{2.3}$$

для некоторого p, $0<p<2$, то

$$M_p(n)\leqslant \frac{K_p(n)}{K_2(n)}=K_p(n)\sqrt{n}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что

$$\|f_k\|_2=1,\qquad f_j\perp f_k\ \ (j\neq k)\qquad \text{и}\qquad \sum_{k=1}^{n} a_k^2=1. \tag{2.5}$$

В этом случае

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k\, f_k(x)\right\|_2=1,$$

и неравенство (2.1) принимает вид

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k\, f_k(x)\right\|_p \leqslant M_p(n)\qquad \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2=1,\quad p>2\right),$$

т.е.

$$\max_{\sum_{k=1}^{n} a_k^2=1}\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k\, f_k(x)\right\|_p^p \leqslant M_p^p(n).$$

Для оценки $M_p(n)$ снизу замечаем, что

$$\max_{\sum_{k=1}^{n} a_k^2=1}\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k\, f_k(x)\right\|_p^p = \max_{\sum_{k=1}^{n} a_k^2=1}\int_E\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\, f_k(x)\right|^p dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_{E_n}\int_E\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(s)\, f_k(x)\right|^p dx\, ds,$$

где E_n и $\alpha_k(s)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ имеют тот же смысл, что и в § 1. Последний интеграл легко вычисляется. Меняя порядок интегрирования, получаем

$$\int_{E_n} \int_E \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k(s)\, f_k(x) \right|^p dx\, ds = \int_E \int_{E_n} \left| \sum_{k=1}^n f_k(x)\, \alpha_k(s) \right|^p ds\, dx =$$

$$= \int_E \left(\sum_{k=1}^n f_k^2(x) \right)^{p/2} dx \int_{E_n} \bigl| \bigl(e(x), n(s)\bigr) \bigr|^p ds,$$

где $e(x)$ — единичный вектор, имеющий то же направление, что и вектор $f(x) = \{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$. Но последний интеграл уже был вычислен в § 1. Именно,

$$\int_{E_n} \bigl| \bigl(e(x), n(s)\bigr) \bigr|^p ds = \frac{\Gamma\bigl(\frac{p+1}{2}\bigr)\Gamma\bigl(\frac{n}{2}\bigr)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\bigl(\frac{n+p}{2}\bigr)} = K_p^p(n).$$

Отсюда получаем

$$\max_{\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1} \left\| \sum_{k=1}^n a_k\, f_k(x) \right\|_p^p \geqslant K_p^p(n) \int_E \left(\sum_{k=1}^n f_k^2(x) \right)^{p/2} dx.$$

Но поскольку $\mu(E) = 1$ и $p > 2$,

$$\int_E \left(\sum_{k=1}^n f_k^2(x) \right)^{p/2} dx \geqslant \left(\int_E \sum_{k=1}^n f_k^2(x)\, dx \right)^{p/2} = n^{p/2}.$$

Таким образом, окончательно

$$M_p(n) \geqslant \max_{\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1} \left\| \sum_{k=1}^n a_k\, f_k(x) \right\|_p \geqslant K_p(n)\sqrt{n} = \frac{K_p(n)}{K_2(n)} \qquad (p > 2).$$

Аналогично рассматривается случай $0 < p < 2$. Мы имеем при выполнении условий (2.5)

$$M_p(n) \leqslant \min_{\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1} \left\| \sum_{k=1}^n a_k\, f_k(x) \right\|_p.$$

Но

$$\min_{\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1} \left\| \sum_{k=1}^n a_k\, f_k(x) \right\|_p^p \leqslant \int_{E_n} \int_E \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k(s)\, f_k(x) \right|^p dx\, ds =$$

$$= \int_E \int_{E_n} \bigl| \bigl(f(x), n(s)\bigr) \bigr|^p ds\, dx = \int_E \left(\sum_{k=1}^n f_k^2(x) \right)^{p/2} dx\ K_p^p(n) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_E \sum_{k=1}^n f_k^2(x)\, dx \right)^{p/2} K_p^p(n) = n^{p/2} K_p^p(n) \qquad (0 < p < 2),$$

откуда следует

$$M_p(n) \leqslant K_p(n)\sqrt{n} = \frac{K_p(n)}{K_2(n)} \qquad (0 < p < 2),$$

и теорема доказана.

Сопоставляя теоремы 1 и 2, получаем

$$M_p^*(n) = \min M_p(n) = \frac{K_p(n)}{K_2(n)} = K_p(n)\sqrt{n} \qquad (p > 2),$$

$$M_p^*(n) = \max M_p(n) = \frac{K_p(n)}{K_2(n)} = K_p(n)\sqrt{n} \qquad (0 < p < 2).$$

Экстремальной системой является, в частности, построенная в § 1 система направляющих косинусов нормалей к сфере S^n.

§ 3. Исследование константы $M_p^*(n)$

Исследуем асимптотическое поведение константы

$$M_p^*(n) = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)}\right)^{1/p}\sqrt{n} \qquad (p > 0), \tag{3.1}$$

когда один или оба параметра p и n неограниченно возрастают.

1) Случай $p \to \infty$. Пусть $p \to \infty$, а $n = n(p) \geqslant 1$ меняется произвольно. Применяя формулу Стирлинга, получаем

$$\left(\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\right)^{1/p} \approx \sqrt{\frac{p}{2e}},$$

$$\left(\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{1/p} \approx \left(\frac{n}{2}\right)^{(n-1)/(2p)} e^{-n/(2p)},$$

$$\left(\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)\right)^{1/p} \approx \left(\frac{n+p}{2}\right)^{(n+p-1)/(2p)} e^{-(n+p)/(2p)},$$

откуда находим

$$M_p^*(n) \approx \sqrt{p}\left(1 + \frac{p}{n}\right)^{-n/(2p)-1/2+1/(2p)}.$$

Так как, кроме того,

$$1 \leqslant \left(1 + \frac{p}{n}\right)^{1/(2p)} \leqslant (1+p)^{1/(2p)} \to 1 \qquad (p \to \infty),$$

то

$$M_p^*(n) \approx \sqrt{\frac{np}{n+p}}\left(1 + \frac{p}{n}\right)^{-n/(2p)} \qquad (p \to \infty). \tag{3.2}$$

В частности,

$$\begin{array}{lll} M_p^*(n) \approx \sqrt{p/e} & \text{при} & p \to \infty, \quad p/n \to 0, \\ M_p^*(n) \approx (1+\alpha)^{-(1+\alpha)/(2\alpha)}\sqrt{p} & \text{при} & p \to \infty, \quad p/n \to \alpha > 0, \\ M_p^*(n) \approx \sqrt{n} & \text{при} & p/n \to \infty. \end{array}$$

Например, если n фиксировано, а $p \to \infty$, то

$$M_p^*(n) \approx \sqrt{n}.$$

2) Случай $n \to \infty$, p фиксировано. Применяя формулу Стирлинга, убеждаемся, что

$$M_p^*(n) = \lim_{n\to\infty} M_p^*(n) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\right)^{1/p} \qquad (p > 0). \tag{3.3}$$

Отсюда следует
$$M_p^*(n) \approx \sqrt{\frac{p}{e}} \qquad (p \to \infty). \tag{3.4}$$

Кроме того, заметим, что при $m = 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned} M_{2m}^* &= \sqrt{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\Big(m+\frac{1}{2}\Big)\Big)^{1/(2m)} = \\ &= \sqrt{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Big(m-\frac{1}{2}\Big)\Big(m-\frac{3}{2}\Big)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big)^{1/(2m)} = \\ &= \sqrt{2}\Big(\frac{1}{2^m}\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2m-1)\Big)^{1/(2m)} = \Big(\frac{(2m)!}{2^m m!}\Big)^{1(2m)}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

а при $p = 1$
$$M_1^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \tag{3.6}$$

Формула (3.3) показывает, что для любой бесконечной системы $\{f_k(x)\}$
$$M_p \geqslant \sqrt{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\Big(\frac{p+1}{2}\Big)\Big)^{1/p} \qquad (p > 2) \tag{3.7}$$
и точно так же
$$M_p \leqslant \sqrt{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\Big(\frac{p+1}{2}\Big)\Big)^{1/p} \qquad (0 < p < 2). \tag{3.8}$$

§ 4. Приложения

В этом параграфе полученные выше результаты прилагаются к изучению свойств нескольких классических лакунарных систем функций.

1) Система Радемахера. Пусть $\{\varphi_\nu(t)\}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ есть система

Радемахера на отрезке $[0,1]$ и

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^2 < \infty.$$

Согласно неравенству Хинчина (см. [1, § 5.5]), если

$$f(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(t),$$

то

$$\|f(t)\|_{2m} \leqslant \left(\frac{(2m)!}{2^m m!}\right)^{1/(2m)} \|f(t)\|_2 \qquad (m = 2, 3, \ldots). \tag{4.1}$$

Это неравенство показывает, что система Радемахера является S_p-лакунарной для любого $p > 2$ и что для нее

$$M_{2m} = \left(\frac{(2m)!}{2^m m!}\right)^{1/(2m)} \qquad (m = 2, 3, \ldots). \tag{4.2}$$

Сопоставляя эту формулу с формулой (3.5), убеждаемся, что

$$M_{2m} = M_{2m}^*.$$

Таким образом, *для системы Радемахера константа M_{2m} имеет наименьшее возможное значение*; в частности, константа в неравенстве Хинчина не может быть улучшена.

2) Лакунарные тригонометрические системы. Пусть m — натуральное число. Если возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ обладает тем свойством, что всякое натуральное N не более чем одним способом представляется в форме

$$N = h_1 n_{k_1} + h_2 n_{k_2} + \ldots,$$

где $n_{k_1} < n_{k_2} < \ldots$, h_i — натуральные числа и $h_1 + h_2 + \ldots = m$, то будем писать $\{n_k\} \in B_m$. Тригонометрическую систему вида $\{\cos n_k x,\ \sin n_k x\}$, где $\{n_k\} \in B_m$, будем называть *системой класса* $\Lambda^{(m)}$. Как хорошо известно (см. [1, § 9.601]), если $\{n_k\} \in B_m$,

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty,$$

то

$$\|f(x)\|_{2m} \leqslant \sqrt{2}\,(m!)^{1/(2m)}\,\|f(x)\|_2, \tag{4.3}$$

где, в соответствии с нашей нормировкой $\mu(E) = 1$,

$$\|f(x)\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \qquad (p \geqslant 1).$$

Таким образом, тригонометрическая система класса $\Lambda^{(m)}$ является S_{2m}-лакунарной, и для нее

$$M_{2m} = \sqrt{2}\,(m!)^{1/(2m)}. \tag{4.4}$$

Заметим, что

$$(m!)^{1/(2m)}\left(\frac{(2m)!}{2^m m!}\right)^{-1/(2m)} = \left(\frac{2^m (m!)^2}{(2m)!}\right)^{1/(2m)} < 1 \qquad (m = 2, 3, \dots) \tag{4.5}$$

и, следовательно,

$$M_{2m} < \sqrt{2} M_{2m}^*.$$

Отсюда вытекает, что константа в неравенстве (4.3) является точной в смысле порядка и не может быть улучшена больше чем в $\sqrt{2}$ раз ни для какой последовательности $\{n_k\}$. Кроме того, при $m \to \infty$

$$M_{2m} \approx \sqrt{\frac{2m}{e}}.$$

Сравнивая эту формулу с формулой (3.4), выводим, что *при больших m тригонометрические системы класса $\Lambda^{(m)}$ являются в смысле значения M_{2m} близкими к наилучшим.* Исходя из этого, нетрудно построить такую тригонометрическую систему, не зависящую от m, для которой

$$\lim_{m\to\infty} \frac{M_{2m}}{M_{2m}^*} = 1.$$

3) Лакунарные системы показательных функций. До сих пор мы все время рассматривали случай действительных систем и действительных коэффициентов. Покажем на примере, что в комплексном случае результаты должны иметь другой вид. Рассмотрим систему $\{e^{in_k x}\}$, где $\{n_k\} \in B_m$ для некоторого целого $m \geqslant 2$. Тогда, как хорошо известно (см. [1, § 9.601]), если

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{n_k} \qquad (|z| < 1),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty,$$

то

$$\|F\|_{2m} \leqslant (m!)^{1/(2m)} \|F\|_2, \tag{4.6}$$

где

$$\|F\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(e^{ix})|^p\, dx\right)^{1/p} \qquad (p \geqslant 1).$$

Таким образом, здесь

$$M_{2m} = (m!)^{1/(2m)}$$

и в силу (4.5) эта константа меньше, чем M_{2m}^* в действительном случае. Поэтому при $m = 2, 3, \dots$ соответствующая наилучшая константа в комплексном случае отлична от M_{2m}^*. Мы не занимались подсчетом этой новой константы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. — М.—Л., 1939.
2. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. — М.: Физматлит, 1958.
3. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III. — М.—Л., 1949.