АППРОКСИМАТИВНАЯ КОМПАКТНОСТЬ И ЧЕБЫШЕВСКИЕ МНОЖЕСТВА *)

В этой заметке мы продолжаем изучение чебышевских множеств в банаховых пространствах, начатое в наших работах [1–3]. Здесь мы указываем необходимое и достаточное условие для того, чтобы чебышевское множество, лежащее в равномерно выпуклом и гладком банаховом пространстве, было выпуклым. Мы прилагаем этот результат к изучению аппроксимативных свойств множества рациональных дробей с заданными степенями числителя и знаменателя в пространствах L_p $(p > 1)$.

В формулировках и доказательствах существенно используется новое понятие аппроксимативной компактности множеств в банаховых пространствах, которому посвящена первая часть заметки. Мы были вынуждены сформулировать это понятие, поскольку ограниченной компактности, которой мы занимались в заметке [3], недостаточно для изучения чебышевских свойств множества рациональных дробей.

1. Аппроксимативно компактные множества в банаховых пространствах. Пусть X — действительное банахово пространство и M — некоторое его подмножество. Если $x \in X$, $y_n \in M$ $(n = 1, 2, \dots)$ и $\lim_{n\to\infty} \rho(x, y_n) = \rho(x, M)$, то будем говорить, что последовательность $\{y_n\}$ является *минимизирующей* для x в M.

Определение. Множество $M \subset X$ назовем *аппроксимативно компактным*, если для любого $x \in X$ любая минимизирующая последовательность элементов $y_n \in M$ является компактной в M.

Класс всех аппроксимативно компактных множеств является довольно широким. Ясно, что всякое ограниченно компактное множество аппроксимативно компактно. Обратное, вообще говоря, неверно, так как, например, всякое замкнутое выпуклое множество в равномерно выпуклом банаховом пространстве аппроксимативно компактно.

Легко видеть, что аппроксимативно компактные множества замкнуты. Кроме того, всякое аппроксимативно компактное множество есть множество существования, т.е. для любого элемента $x \in X$ нижняя грань

$$\inf_{y \in M} \rho(x, y)$$

достигается на некотором элементе $y_0 \in M$ (не обязательно единственном).

Укажем простой признак аппроксимативной компактности множества. Множество $M \subseteq X$ будем называть *секвенциально слабо замкнутым*, если всякая точка пространства, которая является слабым пределом некоторой последовательности элементов $y_n \in M$, принадлежит M. Это определение является топологическим, если пространство X рефлексивно (см. [4]).

Лемма 1. *Пусть X — равномерно выпуклое банахово пространство. Если множество $M \subseteq X$ секвенциально слабо замкнуто, то оно аппроксимативно компактно.*

На аппроксимативно компактные множества переносится ряд предложений, доказанных нами ранее для ограниченно компактных множеств. Например:

---

*) Докл. АН СССР. 1961. Т. 140, № 3. С. 522–524 (*совм. с Н.В. Ефимовым*).

Лемма 2 (о снятии шара). *Пусть M — аппроксимативно компактное множество в банаховом пространстве X; $\overline{E}$ — замкнутый шар, опорный к M в единственной точке x_0, и y_0 принадлежит открытому шару E. Положим $e = y_0 - x_0$. Тогда существует число $\lambda_0 > 0$ такое, что сдвинутый шар*

$$\overline{E}' = \overline{E} + \lambda e$$

не пересекает M при всех λ, $0 < \lambda \leqslant \lambda_0$.

Кроме того, аппроксимативно компактные множества обладают рядом полезных свойств, не присущих ограниченно компактным множествам. Отметим такое предложение.

Лемма 3 (об a-расширениях). *Пусть X — равномерно выпуклое банахово пространство и M — его аппроксимативно компактное подмножество. Тогда для любого $a > 0$ замкнутое a-расширение M_a множества M аппроксимативно компактно.*

Напомним, что под замкнутым a -расширением M мы понимаем множество M_a всех точек $x \in X$, для которых $\rho(x, M) \leqslant a$.

2. Аппроксимативно компактные чебышевские множества. Множество $M \subset X$ называется *чебышевским*, если для любого $x_0 \in X$ существует единственная точка $y_0 \in M$, для которой $\rho(x_0, M) = \rho(x, y)$.

Множество $M \subset X$ мы называем *солнцем* в X, если оно есть множество существования и обладает следующим свойством: пусть x — произвольная точка, не входящая в M, и $y \in M$ такая точка, что $\rho(x, M) = \rho(x, y)$; тогда для любой точки z луча, который исходит из y и проходит через x,

$$\rho(z, M) = \rho(z, y).$$

Пусть даны $M \subset X$ и $a > 0$; *a-оболочкой* множества M мы называем пересечение дополнений всех открытых шаров E_a радиуса a, не пересекающих M.

Множество $M \subset X$ мы называем *a-выпуклым*, если оно совпадает со своей a -оболочкой.

Теорема 1. *В равномерно выпуклом пространстве X свойство аппроксимативно компактного множества быть солнцем в X равносильно чебышевскому свойству.*

Теорема 2. *Аппроксимативно компактное множество в равномерно выпуклом пространстве является чебышевским в том и только том случае, если каждое его замкнутое b-расширение является a-выпуклым при любом $a > 0$.*

Доказательства этих теорем, как и доказательства аналогичных им предложений, сформулированных в нашей заметке [3] для ограниченно компактных множеств, опираются на теорему 1 и лемму 2 заметки [3], а также на леммы 2 и 3 этой заметки.

Если мы кроме равномерной выпуклости X предположим, что X гладко (т.е. что в каждой граничной точке x_0 шара $\overline{E} \subset X$ существует единственная гиперплоскость, опорная к $\overline{E}$ в x_0), то всякое солнце в X выпукло. Отсюда и из теоремы 1 легко вытекает следующая

Теорема 3 (основная). *Пусть X — равномерно выпуклое и гладкое банахово пространство. Для того чтобы чебышевское множество $M \subset X$ было выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы оно было аппроксимативно компактным.*

Вопрос о том, будет ли каждое чебышевское множество, лежащее, например, в гильбертовом пространстве, аппроксимативно компактным, нами не решен.

3. Рациональные дроби в пространствах L_p $(p > 1)$. Обозначим через $R_{m,n}$ множество всех рациональных дробей вида

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p_0 + p_1 x + \ldots + p_m x^m}{q_0 + q_1 x + \ldots + q_n x^n},$$

принадлежащих пространству $L_p[0,1]$, $p > 1$. Если $n \geqslant 2$, то множество $R_{m,n}$ не является ограниченно компактным в L_p. В самом деле, положим

$$R_k(x) = \frac{b_k^{2-1/p}}{x^2 + b_k^2} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

где $b_k = 4^{-pk}$. Тогда $\|R_k(x)\|_{L_p} \leqslant A$, где A — абсолютная константа, и

$$\big\| R_k(x) - R_l(x) \big\|_{L_p} \geqslant 1/4, \qquad k \neq l.$$

Следовательно, ограниченное в L_p множество $\{R_k(x)\}$ некомпактно.

Можно показать, что при всех $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$ множество $R_{m,n}$ секвенциально слабо замкнуто в L_p $(p > 1)$ и, значит, аппроксимативно компактно. Так как, кроме того, при $n \geqslant 1$ множество $R_{m,n}$ не выпукло, то из основной теоремы следует, что *при любых $m \geqslant 0$, $n \geqslant 1$ множество $R_{m,n}$ является в пространстве L_p $(p > 1)$ множеством существования, но не является чебышевским множеством.*

Этот факт выявляет особое положение теоремы Чебышева, согласно которой $R_{m,n}$ есть чебышевское множество в пространстве действительных непрерывных функций $C[0,1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ефимов Н.В., Стечкин С.Б.* Некоторые свойства чебышевских множеств // Докл. АН СССР. 1958. Т. 118, № 1. С. 17–19.
2. *Ефимов Н.В., Стечкин С.Б.* Чебышевские множества в банаховых пространствах // Докл. АН СССР. 1958. Т. 121, № 4. С. 582–585.
3. *Ефимов Н.В., Стечкин С.Б.* Опорные свойства множеств в банаховых пространствах и чебышевские множества // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 2. С. 254–257.
4. *Шмульян В.Л.* Über lineare topologische Räume // Матем. сб. 1940. Т. 7(49), № 3. С. 425–448.