ОПОРНЫЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ЧЕБЫШЕВСКИЕ МНОЖЕСТВА *)

Множество в метрическом пространстве R мы называем *чебышевским*, если для любой точки $x \in R$ существует единственная точка $y \in M$ такая, что расстояние $\rho(x, y) = \rho(x, M)$. Свойства чебышевских множеств в конечномерных банаховых пространствах изучались многими авторами [1–10]. В этой заметке устанавливается несколько предложений о чебышевских множествах в бесконечномерных банаховых пространствах, дополняющих результаты нашей заметки [11], где доказана выпуклость компактных чебышевских множеств, лежащих в банаховом пространстве с равномерно малым перекосом (этот класс пространств включает L_2). Здесь мы рассматриваем чебышевские множества в равномерно выпуклом банаховом пространстве (тем самым в любом L_p, $p > 1$); результаты относятся к множествам, относительно которых предполагается только ограниченная компактность (т.е. компактность пересечения с каждым замкнутым шаром).

Мы доказываем, что каждое ограниченно компактное чебышевское множество, лежащее в равномерно выпуклом и гладком банаховом пространстве, является выпуклым. В доказательстве существенно использованы опорные свойства a-оболочек данного множества и a-выпуклых множеств, которым посвящена первая часть заметки. Кроме того, в терминах a-выпуклости характеризуются ограниченно компактные чебышевские множества в равномерно выпуклых негладких пространствах.

1. Опорные свойства a-выпуклых множеств. Пусть X — банахово пространство; $M \subset X$ — данное множество; a — данное положительное число; E_a — произвольный шар радиуса a ($E_a(\xi)$ обозначает в дальнейшем шар с центром ξ).

Определение. Назовем *a-оболочкой множества* $M \subset X$ пересечение дополнений всех открытых шаров E_a, не пересекающих M; a-оболочку M будем обозначать через $(M)_a$. Множество M назовем *a-выпуклым*, если $M = (M)_a$.

Замкнутый шар $\overline{E}_a$ назовем *опорным к множеству* M в точке $x_0 \in M$, если внутри $\overline{E}_a$ нет точек M и x_0 лежит на границе $\overline{E}_a$.

Множество M будем называть *телом*, если оно имеет внутренние точки и всякая его граничная точка является предельной для внутренних. Наконец, *a-выпуклым телом* назовем замыкание открытого ядра a-выпуклого множества (имеющего внутренние точки).

Мы изучаем здесь опорные свойства a-выпуклых тел, имея в виду при этом выяснение вопроса, насколько обширно множество тех точек границы a-выпуклого тела, в которых существует по крайней мере один или точно один опорный шар радиуса a. Поставленный вопрос является аналогом задачи о существовании и единственности опорной гиперплоскости в граничных точках обычного выпуклого тела. Как известно, имеют место следующие две теоремы Мазура [12].

1) *Если X — любое банахово пространство, то в каждой граничной точке произвольного выпуклого тела $K \subset X$ существует по крайней мере одна гиперплоскость, опорная к телу K.*

---

*) Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 2. С. 254–257 (*совм. с Н.В. Ефимовым*).

2) *Если X — сепарабельное банахово пространство, то на границе выпуклого тела $K \subset X$ существует множество второй категории, в каждой точке которого имеется точно одна гиперплоскость, опорная к телу K.*

При тех же условиях на пространство X аналоги этих теорем для a-выпуклых тел неверны. В самом деле, рассмотрим следующие примеры.

1) Пусть X — пространство ℓ_2, $a > 0$ — данное число; построим множество $M = X \setminus \cup_{k=1}^{\infty} E_a(\xi_k)$, где $\xi_k = \{0, \dots, 0, c_k, 0, \dots\}$, $c_k = a + 1/k$. Можно показать, что M есть a-выпуклое тело, граница которого содержит нулевую точку $\theta = \{0, \dots, 0, \dots\}$, причем в точке θ не существует шара, опорного к телу M.

2) Пусть X — двумерное банахово пространство, которое получается из евклидовой плоскости, если в качестве единичного шара принять евклидов квадрат E. Очевидно, X — сепарабельное пространство, причем в каждой граничной точке E существует бесчисленное множество опорных шаров данного радиуса.

Заметим еще, что возможен случай, когда в каждой точке границы некоторого выпуклого тела существует точно один опорный шар данного радиуса, но имеются граничные точки с неединственной опорной плоскостью. Достаточно рассмотреть двумерное банахово пространство, которое получается из евклидовой плоскости, если в качестве единичного шара принять непустое пересечение двух равных евклидовых кругов с разными центрами; тогда принятый единичный шар обладает указанными свойствами. Таким образом, задача о существовании и единственности опорного шара существенно отлична от соответствующей задачи об опорных гиперплоскостях.

Можно получить, однако, аналог второй теоремы Мазура для a-выпуклых тел в банаховом пространстве при некоторых условиях на единичную сферу. Именно, будем рассматривать банахово пространство X, подчиненное условию: любому $\varepsilon > 0$ соответствует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in X$, $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, $\|x_1 - x_2\| \geqslant \varepsilon$, выполняется неравенство $\|(x_1 + x_2)/2\| \leqslant 1 - \delta(\varepsilon)$; такое банахово пространство называется *равномерно выпуклым* [13]. Сепарабельность пространства не предполагается.

Лемма 1. *Пусть даны точки $a, b \in X$, причем $\|a\| \geqslant \|b\| > 0$; пусть, далее, $b' = -(\|b\|/\|a\|)\, a$, $\rho(b, b') \geqslant d_1 > 0$. Тогда*

$$\rho(a, b) \leqslant \|a\| + \left(1 - 2\delta\left(\frac{d_1}{\|b\|}\right)\right)\|b\|.$$

Лемма 2. *Пусть в пространстве X даны два шара, $E_{a_1}(\xi_1)$ и $E_{a_2}(\xi_2)$, и точка η, причем*

$$\|\xi_1\| = a_1, \quad \|\xi_2\| = a_2, \quad \|\eta\| = c, \quad \rho(\xi_1, \xi_2) \geqslant d > 0,$$
$$0 < a \leqslant a_1 \leqslant a + \varepsilon, \quad a \leqslant a_2 \leqslant a + \varepsilon, \quad 0 < b \leqslant c \leqslant b + \varepsilon.$$

Тогда если

$$0 < \varepsilon \leqslant \min\left\{\frac{d}{4};\ \frac{b}{2}\,\delta\left(\frac{d}{4a}\right)\right\},$$

то

$$\min\{\rho(\eta, \xi_1),\ \rho(\eta, \xi_2)\} < a + b.$$

Эта лемма выводится из леммы 1. С помощью леммы 2 доказывается следующая теорема (аналог второй теоремы Мазура).

Теорема 1. *Пусть X — равномерно выпуклое банахово пространство, $a > 0$ и M — некоторое a-выпуклое тело в пространстве X. Тогда на границе M*

существует множество второй категории, в каждой точке которого имеется точно один шар радиуса a, опорный к телу M.

2. Чебышевские множества в равномерно выпуклых пространствах. Из дальнейшего следует, что всякое ограниченно компактное чебышевское множество в равномерно выпуклом пространстве является a-выпуклым при любом $a > 0$. Однако это свойство еще не характеризует чебышевские множества, так как, например, в трехмерном евклидовом пространстве всякое плоское замкнутое множество обладает тем же свойством. Поэтому содержательные характеристики чебышевских множеств приходится выражать в виде свойств их b-расширений [10], которые являются телами.

Теорема 2. *Пусть M — ограниченно компактное чебышевское множество в равномерно выпуклом банаховом пространстве, $b > 0$ и M_b — замкнутое b-расширение M. Тогда в каждой граничной точке M_b существует единственный опорный к M_b шар любого данного радиуса $a > 0$.*

Доказательство основано на теореме 1 и на лемме о снятии шара [11].

Следствие 1. *При тех же предположениях, если $x \notin M_b$ и $\rho(x, M_b) = \rho(x, y)$, где $y \in M_b$, то для любой точки z, принадлежащей лучу, который исходит из y и проходит через x, будет*

$$\rho(z, M_b) = \rho(z, y).$$

Используя терминологию, принятую в [10], мы можем это свойство выразить в следующей форме: каждое множество M_b является солнцем. Устремляя b к нулю, получим отсюда, что и само множество M есть солнце. Если пространство выпукло, то каждое солнце есть чебышевское множество. Таким образом, *в равномерно выпуклом пространстве свойство ограниченно компактного множества быть солнцем равносильно чебышевскому свойству.*

Следствие 2. *Если M — ограниченно компактное чебышевское множество в равномерно выпуклом пространстве, то для любых $a > 0$, $b > 0$*

$$M_b = (M_b)_a,$$

т.е. любое M_b есть a-выпуклое множество при любом $a > 0$.

В самом деле, пусть $x \notin M_b$ и $\rho(x, M_b) = \rho(x, y)$, где $y \in M_b$. Построим прямолинейный луч, идущий из точки y через x, и найдем на нем такую точку z, что $\rho(z, y) = a$. Тогда согласно следствию 1

$$\rho(z, M_b) = \rho(z, y) = a.$$

Поэтому пересечение $E_a(z) \cap M_b$ пусто; так как, кроме того, $x \in E_a(z)$, то $z \notin$ $\notin (M_b)_a$, что и доказывает утверждение.

Справедливо и обратное: если в равномерно выпуклом пространстве $M_b =$ $= (M_b)_a$ при любых $a > 0$, $b > 0$, то M — чебышевское множество. Таким образом, *в равномерно выпуклом пространстве ограниченно компактные множества являются чебышевскими в том и только том случае, если каждое их b-расширение является a-выпуклым при любом $a > 0$.*

3. Чебышевские множества в равномерно выпуклых и гладких пространствах. Существуют равномерно выпуклые пространства, в которых не всякое чебышевское множество выпукло. В самом деле, если на поверхности единичного шара E пространства X имеется точка x_0, где опорная плоскость к E неединственна, и если K — предельный конус в точке x_0 (т.е. подобный образ E относительно x_0 с коэффициентом подобия $= \infty$), то замкнутое дополнение K

в X будет чебышевским невыпуклым множеством. Таким образом, для выпуклости всех чебышевских множеств существенно условие гладкости пространства. При наших дополнительных предположениях это условие является также и достаточным; именно, имеет место

Теорема 3. *Если ограниченно компактное множество, лежащее в равномерно выпуклом и гладком пространстве, является чебышевским, то оно выпукло.*

Теорема 3 выводится из теоремы 2.

Заметим, что в равномерно выпуклом пространстве каждое замкнутое выпуклое множество является чебышевским. Таким образом, для того, чтобы ограниченно компактное множество, лежащее в равномерно выпуклом и гладком пространстве, было чебышевским, необходимо и достаточно, чтобы это множество было выпуклым.

Отсюда с учетом результатов Кларксона [13] и Шмульяна [14] получается.

Теорема 4. *Ограниченно компактное множество, лежащее в* L_p, $p > 1$, *является чебышевским тогда и только тогда, когда оно выпукло.*

Из теоремы 3 вытекает, в частности, что *в* n*-мерном банаховом пространстве* X_n *класс всех чебышевских множеств совпадает с классом замкнутых выпуклых множеств в том и только том случае, когда единичная сфера является строго выпуклой и гладкой.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bunt L.N.H.* Bijdrage tot de theorie der convexe puntverzamelingen // Thesis Univ. Groningen. — Amsterdam, 1934.
2. *Motzkin T.* Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes // Rend. Accad. Naz. Lincei, Red. VI. 1935. V. 21. P. 562–567.
3. *Motzkin T.* Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles bornés non convexes // Rend. Accad. Naz. Lincei, Red. VI. 1935. V. 21. P. 773–779.
4. *Bungaard S., Deurlund D.* To Bemaerknigen om konvekse Figurer // Mat. Tidsskrift. B. 1937. P 81–85.
5. *Kritikos N.* Sur quelques propriétés des ensembles convexes // Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 1938. V. 40. P 87–92.
6. *Beretta L., Maxia A.* Insiemi convessi e orbiformi // Rend. Math. e Applic. Ser. 5. 1940. V. 1, № 1. P. 1–64.
7. *Jessen B.* To Saetninger om konvekse Punktmaengder // Mat. Tidsskrift. B. 1940. V. 66–70.
8. *Busemann H.* Note on a theorem on convex sets // Mat. Tidsskrift. B. 1947. V. 32–34.
9. *Busemann H.* Geometry of Geodesics. — N.Y., 1955.
10. *Ефимов Н.В., Стечкин С.Б.* Некоторые свойства чебышевских множеств // Докл. АН СССР. 1958. Т. 118, № 1. С. 17–19.
11. *Ефимов Н.В., Стечкин С.Б.* Чебышевские множества в банаховых пространствах // Докл. АН СССР. 1958. Т. 121, № 4. С. 582–585.
12. *Mazur S.* Úber konvexe mengen in linearen normierten Räumen // Stud. Math. 1933. V. 4, № 70–84.
13. *Clarkson J.A.* Uniformly convex spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1936. V. 40, № 3. P. 396–414.
14. *Шмульян В.Л.* О некоторых геометрических свойствах единичной сферы пространства типа (B) // Матем. сб. 1939. Т. 6, № 1. С. 77–94.