ЧЕБЫШЕВСКИЕ МНОЖЕСТВА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ*)

1. Множество M, лежащее в метрическом пространстве R, мы называем *чебышевским*, если для любой точки $x \in R$ существует единственная точка $y \in M$ такая, что расстояние $\rho(x, y) = \rho(x, M)$ (в связи с этим см. [1]).

В этой заметке устанавливается *выпуклость компактных чебышевских множеств в банаховых пространствах при некоторых ограничениях на единичную сферу, именно, в пространствах с гладкой единичной сферой, имеющей равномерно малый перекос* (см. 6). В частности, тем самым устанавливается выпуклость компактных чебышевских множеств в пространстве Гильберта.

2. Далее через X обозначается действительное банахово пространство, через $E_a(p)$ — открытый шар радиуса a с центром $p \in X$, через $O_a(p)$ — дополнение $E_a(p)$ в X.

Пусть дано множество $M \subset X$ и плоскость $L \subset X$. Обозначим через (L, M, a) пересечение L и всех $O_a(p)$, $p \in L$, содержащих M. Тогда:

1) (L, M, a) *замкнуто* (как пересечение замкнутых множеств);

2) *если* $M \subseteq M'$, *то* $(L, M, a) \subseteq (L, M', a)$;

3) *если* $a_1 < a_2$, *то* $(L, M, a_1) \subseteq (L, M, a_2)$.

Свойство 2) сразу следует из определения. Также непосредственно усматривается 3); в самом деле, если $x \in L$ не принадлежит (L, M, a_2), т.е. находится внутри некоторого шара $E_{a_2}(p_2)$, $p_2 \in L$, не содержащего M, то x находится внутри шара $E_{a_1}(p_1)$, $p_1 \in L$, который содержится в шаре $E_{a_2}(p_2)$. Таким образом, дополнение (L, M, a_1) в L включает дополнение (L, M, a_2), следовательно, $(L, M, a_1) \subseteq (L, M, a_2)$.

3. В том случае, когда $L \equiv X$, мы будем обозначать (L, M, a) через (M, a) и называть это множество *a-оболочкой множества* M. С другой стороны, при $L \not\equiv X$ мы будем часто рассматривать множества внутри L, отвлекаясь от X; в таких случаях мы будем называть L *пространством*, считая, что некоторая точка L принята в качестве начальной.

Имеют место следующие свойства a-оболочек:

4) $M \subseteq (M, a)$ *при любом* a;

5) $(L, \overline{M}, a_0)$ *совпадает со своей a-оболочкой в пространстве* L *при любом* $a \leqslant a_0$ (доказывается аналогично 3) с учетом 4));

6) *замыкание теоретико-множественной суммы всех* (L, M, a), $0 < a < \infty$, *совпадает со своей a-оболочкой в пространстве* L *при любом* a (доказывается аналогично 5)).

4. Рассмотрим n-мерное банахово пространство X_n с гладкой единичной сферой, т.е. имеющее в каждой точке единичной сферы единственную опорную гиперплоскость.

Лемма 1. *Пусть K — множество вершин полномерного симплекса $S \subset X_n$; тогда замыкание теоретико-множественной суммы всех a-оболочек K есть симплекс S.*

Лемма 2. *Пусть $M \subset X_n$; если $M \equiv (M, a)$ при любом a, то M либо выпукло, либо вырождено (т.е. лежит в некоторой гиперплоскости).*

Лемма 2 следует из леммы 1.

---

*) Докл. АН СССР. 1958. Т. 121, № 4. С. 582–585 (*совм. с Н.В. Ефимовым*).

5. Здесь мы снова рассматриваем бесконечномерное банахово пространство X. Мы называем замкнутый шар E *опорным* к некоторому множеству Q в точках его подмножества Q_1, если внутри $\overline{E}$ нет точек Q, а Q_1 лежит на границе $\overline{E}$.

Лемма 3. *Если $M \subset X$ компактно, то для любой граничной точки y_0 множества (L, M, a) как множества пространства L (L — конечномерное пространство) найдется замкнутый шар $\overline{E}_a(p)$, $p \in L$, опорный к (L, M, a) в точке y_0 и также опорный к M.*

Лемма 4 (о снятии шара). *Пусть $M \subset X$ — компактное множество; $\overline{E}$ — замкнутый шар, опорный к M в единственной точке x_0; e — вектор, идущий из x во внутреннюю область шара $\overline{E}$. Тогда существует $\lambda_0 > 0$ такое, что шар*

$$\overline{E}' = \overline{E} + \lambda e$$

не пересекает M при всех λ, $0 < \lambda \leqslant \lambda_0$.

Лемма 5. *Пусть шар $\overline{E}$ является гладким; A — опорная гиперплоскость к $\overline{E}$ в его произвольной точке x; e — вектор, который, будучи приложен к x, идет в то (открытое) полупространство X относительно A, где находится шар $\overline{E}$. Тогда e идет во внутреннюю область шара $\overline{E}$.*

Доказательство. Допустим, что ни одна точка отрезка $z = x + te$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, не является внутренней точкой $\overline{E}$. Обозначим через W выпуклую оболочку этого отрезка и $\overline{E}$. Замкнутое множество W является выпуклым телом, $z = x + te$, $0 < t < t_0$, — его граничная точка. По теореме Мазура [2] в точке z существует опорная к W гиперплоскость B. Эта гиперплоскость содержит весь отрезок $z = x + te$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, и, следовательно, является опорной гиперплоскостью к шару $\overline{E}$ в точке x_0. Кроме того, по построению B не совпадает с A. Мы пришли к противоречию с определением гладкости шара $\overline{E}$. Отсюда вытекает, что существует точка $z_1 = x + t_1 e$, $0 < t_1 \leqslant t_0$, внутренняя для $\overline{E}$; следовательно, весь отрезок $z = x + te$, $0 < t \leqslant t_1$, состоит из внутренних точек $\overline{E}$. Лемма доказана.

6. Пусть X — строго выпуклое банахово пространство; S — его единичная сфера; L_n — n-мерное подпространство; $x \in S$ — произвольная точка, отстоящая от L_n на расстояние $\leqslant \varepsilon < 1$; Λ_{n-1} — $(n-1)$-мерная плоскость, касательная к S в точке x и параллельная L_n. Рассмотрим пересечение S и L_n; вследствие строгой выпуклости X найдутся точно две точки $y_1, y_2 \in L_n$, в которых $(n-1)$-мерная касательная плоскость к S параллельная Λ_{n-1}; обозначим через y ближайшую из них к точке x; через $\rho(x, y)$ — расстояние между x и y. Мы будем говорить, что X является *пространством с равномерно малым перекосом*, если существует число k $(k > 1)$ такое, что

$$\rho(x, y) \leqslant f(\varepsilon), \quad f(\varepsilon) = k\varepsilon,$$

для всех $x \in S$.

Пространство с равномерно малым перекосом обладает следующим свойством, которым мы и будем пользоваться в дальнейшем: если L_n — n-мерная плоскость, проходящая через центр p сферы $S_a(p)$, а все остальные обозначения сохраняют аналогичный смысл, то $\rho(x, y) \leqslant f(\varepsilon)$ для всех a и $x \in S_a(p)$.

Замечание. Можно показать, что не всякое равномерно выпуклое пространство является пространством с равномерно малым перекосом; однако гильбертово пространство относится к этому типу (для него $\rho(x, y) \leqslant \varepsilon\sqrt{2}$).

7. Пусть M — чебышевский компакт в пространстве с равномерно малым перекосом и гладкой единичной сферой. По любому $\varepsilon > 0$ найдем какую-нибудь ε-сеть множества M, построим наименьшую конечномерную плоскость L_ε, проходящую через все точки этой ε-сети, и построим множество (L_ε, M, a).

Лемма 6. *Для любого $a > 0$ каждая точка множества (L_ε, M, a) отстоит от M на расстояние $\leqslant f(\varepsilon)$.*

Доказательство. Из определения множеств (L_ε, M, a) следует, что оно ограничено и, следовательно, имеет граничные точки в L_ε. Рассмотрим какую-нибудь его граничную точку y_0. Согласно лемме 3 существует замкнутый шар $\overline{E}_a(p)$, опорный к множеству (L_ε, M, a) в точке y_0 и одновременно опорный к M. Так как M — чебышевское множество, то $\overline{E}_a(p)$ пересекается с M в единственной точке x_0. Докажем, что $\rho(x_0, y_0) \leqslant f(\varepsilon)$. Обозначим через A и B гиперплоскости в X, опорные к $\overline{E}_a(p)$ соответственно в точках x_0 и y_0. Если $\rho(x_0, y_0) > f(\varepsilon)$, то пересечения A и B с L_ε не параллельны. Поэтому найдется вектор e, который принадлежит L_ε и удовлетворяет следующим двум условиям:

1) будучи приложен к какой-нибудь точке гиперплоскости A, он направлен в то открытое полупространство X относительно A, где находится шар $\overline{E}_a(p)$;

2) будучи приложен к какой-нибудь точке гиперплоскости B, он направлен в то открытое полупространство X относительно B, где не лежит шар $\overline{E}_a(p)$.

Вследствие леммы 5 и первого из этих двух условий вектор e с точкой приложения x_0 направлен во внутреннюю область шара $\overline{E}_a(p)$. На основании леммы 4 существует число $\lambda_0 > 0$ такое, что шар

$$\overline{E}_{a'}(p') = \overline{E}_a(p) + \lambda e, \quad 0 < \lambda \leqslant \lambda_0,$$

не пересекает M, причем имеет центр p' в плоскости L_ε. Вследствие второго условия определения вектора e точка y_0 при достаточно малом λ будет находиться внутри шара $\overline{E}_a(p')$, т.е. будет внешней точкой множества (L_ε, M, a) в пространстве L_ε.

Мы получили противоречие с условием, что y_0 — граничная точка (L_ε, M, a). Тем самым неравенство $\rho(y_0, x_0) \leqslant f(\varepsilon)$ доказано от противного. Следовательно, $\rho(y_0, M) \leqslant f(\varepsilon)$.

Теперь мы докажем, что каждая внутренняя точка множества (L_ε, M, a) в пространстве L_ε отстоит от M также на расстояние $\leqslant f(\varepsilon)$.

Допустим, что внутри (L_ε, M, a) в пространстве L_ε есть точка y, для которой $\rho(y, M) > f(\varepsilon)$. Так как множество (L_ε, M, a) компактно, то непрерывная функция $\rho(y, M)$ имеет на нем максимум $m = \rho(q, M) > f(\varepsilon)$, $q \in L_\varepsilon$. Точка q лежит внутри (L, M, a), так как согласно доказанному на границе имеем $\rho(x, M) \leqslant f(\varepsilon)$. Рассмотрим в X шар $\overline{E}_m(q)$. Этот шар имеет с M пересечение в единственной точке x_0. Так как $\varepsilon \leqslant f(\varepsilon) < m$, то опорная гиперплоскость C шара $\overline{E}_m(q)$ в точке x_0 не параллельна L_ε. Поэтому существует вектор $e \in L_\varepsilon$, который, будучи приложен к точке x_0, направлен в ту половину пространства X относительно гиперплоскости C, где находится шар $\overline{E}_m(q)$, т.е. во внутреннюю область этого шара. Снова применяя лемму 4, найдем, что существует $\lambda_0 > 0$ такое, что шар

$$\overline{E}_m(q_1) = \overline{E}_m(q) + \lambda e, \quad 0 < \lambda \leqslant \lambda_0,$$

не имеет общих точек с M. При достаточно малом λ точка q_1 будет внутри (L_ε, M, a) в пространстве L_ε, причем $\rho(q_1, M) > m$.

Мы пришли к противоречию с определением числа m. Тем самым доказано, что для любой точки $y \in (L_\varepsilon, M, a)$ имеет место соотношение $\rho(y, M) \leqslant f(\varepsilon)$, т.е.

доказана лемма.

Теорема. *Чебышевский компакт в банаховом пространстве с равномерным малым перекосом и гладкой единичной сферой является выпуклым множеством.*

Доказательство. Пусть G_ε — замыкание теоретикомножественной суммы всех (L_ε, M, a), $0 < a < \infty$. Согласно 4

$$G_\varepsilon = (G_\varepsilon, a) \ \text{ в } \ L_\varepsilon.$$

По построению L_ε множество G_ε не вырождено в пространстве L_ε. Отсюда вследствие леммы 2 G_ε выпукло. По лемме 6 расстояние от любой точки $y \in G_\varepsilon$ до множества M удовлетворяет неравенству

$$\rho(y, M) \leqslant f(\varepsilon).$$

По определению функции $f(\varepsilon)$ имеем $f(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, компактное множество M сколь угодно хорошо аппроксимируется выпуклыми множествами. Отсюда следует, что M выпукло. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ефимов Н.В., Стечкин С.Б.* Некоторые свойства чебышевских множеств // Докл. АН СССР. 1958. Т. 118, № 1. С. 17–19.
2. *Mazur S.* Über konvexe mengen in linearen normierten Räumen // Stud. Math. 1933. V. 4. P. 70–84.