НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЧЕБЫШЕВСКИХ МНОЖЕСТВ *)

1. Мы рассматриваем банахово пространство X и некоторое множество $M \subset X$; как обычно, мы называем *расстоянием* от $x \in X$ до M число

$$\rho(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

В связи с задачей о наилучших приближениях будем называть M:

1) *множеством существования*, если для любого $x \in X$ найдется ближайший элемент $y \in M$, т.е. найдется $y \in M$ такой, что $\rho(x, M) = \rho(x, y)$;

2) *множеством единственности*, если для любого $x \in X$ найдется не более одного ближайшего элемента $y \in M$.

Множество, которое одновременно является множеством существования и единственности, назовем *чебышевским*. В дальнейшем M предполагается ограниченным.

2. Настоящая заметка в основном посвящена следующему вопросу: каковы соотношения между классом чебышевских и классом выпуклых множеств? В частности, при каких условиях на банахово пространство X можно утверждать, что каждое чебышевское множество $M \subset X$ является выпуклым? Ниже дается решение этой задачи в случае n-мерного пространства X_n; попутно сообщаются некоторые простые геометрические предложения, справедливые в произвольном X.

3. Очевидно, каждое множество существования, а следовательно, и каждое чебышевское множество является замкнутым. Поэтому в дальнейшем речь идет лишь о замкнутых множествах.

Простейшие примеры показывают, что возможны банаховы пространства X (или X_n), в которых существуют чебышевские не выпуклые и выпуклые не чебышевские множества. В самом деле, пусть X_2 — евклидова плоскость, на которой введена новая метрика так, что в качестве единичной окружности принят евклидов квадрат K. Тогда в X_2 существуют выпуклые множества, которые не являются чебышевскими, например K; ясно, что сущность дела здесь заключается в наличии на единичной окружности прямолинейных отрезков. С другой стороны, в X_2 существуют чебышевские множества, которые не являются выпуклыми. Такое множество мы получим, например, если из евклидова круга вырежем сектор с тупым углом, евклидова биссектриса которого параллельна диагонали квадрата K; здесь сущность дела заключается в наличии у единичной окружности угловых точек.

4. Пусть E — единичная сфера пространства X. Сфера называется *строго выпуклой*, если из условий $x_0 \in X$, $x_1 \in X$, $x_0 \neq x_1$, $\|x_0\| = 1$, $\|x_1\| = 1$ вытекает $\|x_t\| < 1$, где $x_t = (1-t)x_0 + tx_1$ $(0 < t < 1)$, т.е. если E не содержит ни одного отрезка.

Сфера E *не содержит конических точек* (в двумерном случае — угловых точек), если для любого $x_0 \in E$ найдется один и только один линейный функционал f_0, удовлетворяющий условиям $\|f_0\| = 1$, $f_0(x_0) = 1$.

Эти два свойства в известном смысле взаимны. Именно, пусть E^* — единичная сфера сопряженного пространства X^*. Тогда, если E^* строго выпукла, то

*) Докл. АН СССР. 1958. Т. 118, № 1. С. 17–21 (*совм. с Н.В. Ефимовым*).

E не имеет конических точек; если E^* не имеет конических точек, то E строго выпукла.

5. Обобщая соображения, приведенные в 3, легко усмотреть, что в любом пространстве X, где сфера E не является строго выпуклой, существуют выпуклые не чебышевские множества; в любом пространстве X, где сфера E содержит конические точки, существуют чебышевские, но не выпуклые множества. Наряду с этим справедлива

Теорема 1. *Если в n-мерном банаховом пространстве X_n единичная сфера не имеет конических точек, то каждое ограниченное чебышевское множество $M \subset X_n$ является выпуклым.*

Если сфера E строго выпукла, то тривиально устанавливается, что каждое выпуклое множество является чебышевским; отсюда и на основании сказанного ранее как следствие теоремы 1 получаем теорему 2.

Теорема 2 [*]. *В n-мерном банаховом пространстве X_n класс ограниченных чебышевских множеств совпадает с классом ограниченных выпуклых множеств в том и только том случае, когда единичная сфера X_n является строго выпуклой и не имеет конических точек.*

Основные моменты доказательства теоремы 1 изложены в 7. В следующем пункте сообщаются некоторые предложения о расширениях данного множества M (они нужны для 7).

6. Пусть X — любое банахово пространство, $M \subset X$. Множество точек $x \in X$, для которых $\rho(x, M) < a$ $(a > 0)$, назовем *a-расширением* множества M и будем обозначать символом M_a.

Тогда:

1) M_a — открытое множество;

2) если M связано, то M_a также связано;

3) если M ограничено, то M_a также ограничено; границу M_a будем обозначать через G_a, множество $M_a + G_a$ — $\overline{M}_a$;

4) G_a есть множество всех $x \in X$, для которых $\rho(x, M) = a$;

5) если x не принадлежит M_a, то $\rho(x, M_a) = \rho(x, \overline{M}_a) = \rho(x, G_a)$;

6) если x не принадлежит M_a, то $\rho(x, M) = \rho(x, M_a) + a$;

7) $M_{a_1+a_2} = (M_{a_1})_{a_2}$;

8) если M ограничено, то существует число a_0 такое, что G_a при любом $a \geqslant a_0$ обладает свойством сильной звездности, т.е. любой луч, исходящий из некоторой точки $p \in X$, пересекает G_a точно <u>один</u> раз;

9) если M — множество существования, то $\overline{M}_a$ — также множество существования.

7. Пусть $M \subset X$ — ограниченное чебышевское множество. Рассмотрим произвольный элемент $x \in X$, не принадлежащий M. По определению чебышевского множества существует и притом единственный элемент $y \in M$ такой, что $\rho(x, y) = \rho(x, M)$; назовем этот элемент *y проекцией x* на M. Легко показать, что каждый элемент x', принадлежащий отрезку $[x, y]$, имеет в качестве проекции на M тот же элемент y. Заранее не ясно, будут ли иметь общую проекцию на

---

[*] В работе "Опорные свойства множеств в банаховых пространствах" (с. ?? настоящего издания) авторы указали в примечании, что эта теорема ошибочна. А именно, в случае $n \geqslant 3$ существуют строго выпуклые пространства X_n, единичная сфера которых имеет конические (точнее, ребристые) точки и в которых тем не менее всякое ограниченное чебышевское множество выпукло.

M остальные элементы луча, который идет из y в x. Выяснение этого вопроса по-существу и является главной целью дальнейших рассуждений.

Возьмем какое-нибудь число $a > 0$ и точку $x \in X$, лежащую вне $\overline{M}_a$. Назовем *проекцией точки x на G_a* пересечения G_a с отрезком $[x, y]$, где y — проекция x на M. Согласно сказанному в этом пункте с учетом 4) из 6 заключаем, что проекция x на G_a определяется однозначно; кроме того, если $b > a$, то разные точки G_b не могут проектироваться в одну и ту же точку G_a. Наконец, если M компактно, то проекция $x \in G_b$ на G_a непрерывно зависит от x, а также x непрерывно зависит от своей проекции. Таким образом, при указанных условиях проекция G_b в G_a гомеоморфна G_b. Допустим, что X является n-мерным банаховым пространством. Тогда согласно 8) из 6, если a достаточно велико, то G_a и все G_b $(b > a)$ представляют собой $(n-1)$-мерные топологические сферы; поэтому проекция G_b в G_a покрывает все G_a (при любом $b > a$). Но в таком случае, как легко показать, если x не принадлежит $\overline{M}_a$ и проектируется в точку $y \in M$, то весь луч, идущий из y в x, проектируется в точку y. Множество M_a с таким свойством условимся называть "*солнцем*", а лучи, по которым проектируются точки $x \in M_a$ на M, его *лучами*. Продолжим лучи солнца во внутрь G_a на величину $a - \alpha$ $(0 < \alpha < a)$; концы продолженных лучей образуют множество P_α, которое представляет собой проекцию G_a в G_α (см. 6) и 7) из 6). Множество P_α есть $(n-1)$-мерная топологическая сфера, следовательно, ограничивает некоторую область Q_α. Область Q_α выпукла, а P_α — ограничивающая ее выпуклая поверхность. В самом деле, возьмем на P_α произвольную точку x_α и рассмотрим луч солнца, идущий через x_α. На этом луче с внешней стороны возьмем какую-нибудь точку p и проведем через x_α сферу E_α с центром p. Сфера E_α не содержит внутри себя точек P_α (для доказательства следует использовать определение чебышевского множества и учесть 6) из 6). Будем точку p отодвигать по лучу в бесконечность. Если на E_α отсутствуют конические точки, то предел E_α есть гиперплоскость. Эта гиперплоскость является опорной к P_α и, следовательно, к $\overline{Q}_\alpha$. Итак, $\overline{Q}_\alpha$ в каждой граничной точке, т.е. в каждой точке P_α, имеет опорную плоскость. Отсюда $\overline{Q}_\alpha$ — выпуклое тело, P_α — выпуклая поверхность. Далее, $M \subset \underline{Q_\alpha}$, следовательно, M принадлежит пересечению Q_α. С другой стороны, $Q_\alpha \subset \overline{M}_\alpha$. Поэтому M есть пересечение Q_α и тем самым выпуклое множество. Теорема 1 доказана.