О ПРИБЛИЖЕНИИ АБСТРАКТНЫХ ФУНКЦИЙ*)

Пусть на некотором компакте Q задано N непрерывных независимых действительных функций
$$f_1(q),\ f_2(q),\ \ldots,\ f_N(q), \tag{1}$$
из которых строятся вспомогательные полиномы
$$P_\alpha(q) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k\, f_k(q) \tag{2}$$
с действительными коэффициентами $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) = \alpha$.

Классическая задача чебышевского приближения непрерывной на Q действительной функции $\varphi(q)$ при помощи полинома (2) заключается в отыскании такого полинома $P_{\alpha^*}(q) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^*\, f_k(q)$, чтобы для него уклонение
$$L(\alpha) = \max_{q\in Q} \bigl|P_\alpha(q) - \varphi(q)\bigr| \tag{3}$$
было наименьшим, т.е. чтобы для него достигалась величина
$$\inf_\alpha \max_{q\in Q} \bigl|P_\alpha(q) - \varphi(q)\bigr| = \mathcal{E}(\varphi). \tag{4}$$

В этой задаче полностью решены следующие три проблемы.

1. Проблема существования полинома наименьшего уклонения для любой непрерывной на Q действительной функции $\varphi(q)$.

2. Проблема отыскания условий, характеризующих полином наименьшего уклонения.

3. Проблема единственности полинома наименьшего уклонения, т.е. отыскания условий для того, чтобы для каждой непрерывной на Q функции существовал лишь один полином наименьшего уклонения.

Решения предыдущих задач формулируются в виде таких теорем.

Теорема 1 (существования). *Для каждой непрерывной на Q функции $\varphi(q)$ существует полином $P_{\alpha^*}(q)$, наименее уклоняющийся от нуля на Q.*

Теорема 2 (характеристика полинома наименьшего уклонения). *Для того чтобы полином $P_\alpha(q)$ наименее уклонялся на Q от функции $\varphi(q)$, необходимо и достаточно, чтобы его уклонение (3) достигалось не менее, чем в $N+1$ точках $q_1, q_2, \ldots, q_{N+1}$ компакта Q, причем если Q представляет собой сегмент $[a, b]$ и $q_1 < q_2 < \ldots < q_{N+1}$, то знаки разности $P_\alpha(q) - \varphi(q)$ чередуются в этих точках; в случае же произвольного компакта Q знаки указанной разности подчиняются в этих точках следующему правилу:*
$$\operatorname{sign}[P_\alpha(q_k) - \varphi(q_k)] = \lambda \operatorname{sign} C_k = \operatorname{sign}(C \cdot C_k),$$
где
$$C = \begin{vmatrix} f_1(q_1) & f_2(q_1) & \ldots & f_N(q_1) & -\varphi(q_1) \\ f_1(q_2) & f_2(q_2) & \ldots & f_N(q_2) & -\varphi(q_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1(q_{N+1}) & f_2(q_{N+1}) & \ldots & f_N(q_{N+1}) & -\varphi(q_{N+1}) \end{vmatrix},$$

*) Успехи матем. наук. 1957. Т. XII, вып. 1(73). С. 187–191 (*совм. с С.И. Зуховицким*).

C_k — алгебраическое дополнение элемента $\varphi(q_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, а $\lambda = \pm 1$ и не зависит от k.

Все это верно и в предположении, что функции $f_1(q), f_2(q), \ldots, f_N(q)$ образуют на Q систему Чебышева (см. следующую теорему).

Теорема 3 (единственности, А. Хаар [1]). *Для того чтобы для каждой непрерывной на Q функции $\varphi(q)$ полином наименьшего уклонения был единственным, необходимо и достаточно, чтобы функции $f_1(q), f_2(q), \ldots, f_N(q)$ образовывали на Q систему Чебышева, т.е. чтобы каждый полином $P_\alpha(q) \not\equiv 0$ имел на Q не более чем $N-1$ различных нулей.*

Формулировка теоремы 2 усложняется, если функции $f_1(q), \ldots, f_N(q)$ не образуют на Q системы Чебышева (а единственность, как следует из теоремы 3, не имеет места).

В 1948 г. А.Н. Колмогоров [2] распространил решение указанных трех проблем на случай, когда функции $\varphi(q)$, (1) и коэффициенты полинома являются комплексными, показав, что теорема существования и теорема единственности без изменения переносятся и на этот случай, а для характеристики полинома наименьшего уклонения им была установлена следующая теорема.

Теорема Колмогорова. *Для того чтобы полином $P_\alpha(q)$ наименее уклонялся на Q от функции $\varphi(q)$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого полинома $P_\beta(q) = \sum_{k=1}^N \beta_k\, f_k(q)$ выполнялось условие*

$$\min_{q \in M(\alpha, \varphi)} \operatorname{Re}\left\{\overline{[P_\alpha(q) - \varphi(q)]} \cdot P_\beta(q)\right\} \leqslant 0, \tag{5}$$

где $M(\alpha, \varphi)$ — множество тех точек из Q, на которых достигается

$$\max_{q \in Q} \left|P_\alpha(q) - \varphi(q)\right|.$$

В 1950 г. эти вопросы подверглись дальнейшему обобщению в совместной работе С.И. Зуховицкого и М.Г. Крейна [3], в которой функции (1) являются s-мерными вектор-функциями, т.е. функциями со значениями в s-мерном унитарном пространстве H, числа $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) = \alpha$ — комплексными, а полиномы $P_\alpha(q) = \sum_{k=1}^N \alpha_k\, f_k(q)$ — вектор-многочленами.

Случай, рассмотренный А.Н. Колмогоровым, соответствует $s = 1$.

Теорема существования переносится на приближения вектор-функций без изменения: для каждой непрерывной на Q вектор-функции $\varphi(g)$ существует вектор-полином наименьшего уклонения. Теорема А.Н. Колмогорова переносится также почти без изменения, только вместо обычного произведения в формуле (5) надо рассматривать скалярное; для того чтобы вектор-многочлен $P_\alpha(q)$ наименее уклонялся на Q от вектор-функции $\varphi(q)$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого вектор-полинома $P_\beta(q)$ выполнялось условие

$$\min_{q \in M(\alpha,\, \varphi)} \operatorname{Re}\left(P_\alpha(q) - \varphi(q),\, P_\beta(q)\right) \leqslant 0,$$

где $M(\alpha, \varphi)$ определяется, как и раньше.

Что же касается проблемы единственности, то в [3] рассмотрен лишь случай, *когда N кратно s : $N = ns$.* В этом предположении теорема единственности формулируется так: *для того чтобы для любой непрерывной на Q вектор-функции $\varphi(q)$ существовал единственный наименее уклоняющийся от нее вектор-полином, необходимо и достаточно, чтобы каждый вектор-полином $P_\alpha(q) \not\equiv 0$ обращался на Q в нуль не более чем в $n-1$ точках.*

Заметим, что в этой работе условие конечномерности пространства существенно.

Естественно было так видоизменить постановку задачи, чтобы ее можно было рассматривать и в бесконечномерных абстрактных пространствах. Это было сделано в диссертации С.И. Зуховицкого (1950 г.) и в его работах [4, 5], где задача чебышевского приближения ставится следующим образом: пусть $F(q)$ — оператор-функция, зависящая равномерно непрерывно от параметра $q \in Q$, значениями которой для каждого q являются линейные непрерывные операторы, действующие в гильбертовом пространстве H; для каждой непрерывной на Q абстрактной функции $\varphi(q)$ со значениями в H ищется элемент $a \in H$ такой, чтобы для него достигалась величина

$$\inf_{\alpha \in H} \max_{q \in Q} \big\| F(q)a - \varphi(q) \big\|. \tag{6}$$

Оказалось, что если на оператор-функцию $F(q)$, кроме требования линейности и непрерывности при каждом $q \in Q$ и равномерной непрерывности от q, не накладывать никаких ограничений, то существование указанного элемента не может быть гарантировано. Вот почему от оператор-функции $F(q)$ приходится требовать, чтобы она обладала еще такими свойствами.

С в о й с т в о a). Если R — подпространство элементов $a \in H$, для которых $F(q)a = \theta$ при всех $q \in Q$, то на подпространстве S, являющемся ортогональным дополнением к R в H, оператор-функция $F(q)$ ограничена снизу в том смысле, что существует такое постоянное число $m > 0$, что для любого $a \in S$ выполняется неравенство

$$\max_{q \in Q} \big\| F(q)a \big\| \geqslant m\, \|a\|.$$

С в о й с т в о b). Если при некотором $q_1 \in Q$ уравнение $F(q_1)a = \theta$ имеет в подпространстве S нетривиальное решение $a_1 \neq \theta$, то и уравнение $F^*(q_1)a = \theta$, где $F^*(q_1)$ — оператор, сопряженный с оператором $F(q_1)$, также имеет нетривиальное решение $\tilde{a}_1 \neq \theta$.

Решения наших трех проблем выражаются в этом случае следующими теоремами.

Теорема $1'$ (существования). *Если линейная непрерывная оператор-функция $F(q)$ обладает свойством* a), *то для каждой непрерывной на Q абстрактной функции $\varphi(q)$ существует элемент $a^0 \in H$ такой, что абстрактная функция $F(q)a^0$ наименее уклоняется на Q от данной абстрактной функции $\varphi(q)$.*

Теорема $2'$ (аналог теоремы Колмогорова). *Пусть $F(q)$ — линейная непрерывная оператор-функция (может быть, и не обладающая ни свойством* a), *ни свойством* b)). *Для того чтобы абстрактная функция $F(q)a$ наименее уклонялась от абстрактной функции $\varphi(q)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $b \in H$ выполнялось неравенство*

$$\min_{q \in M(a,\varphi)} \big(F(q)a - \varphi(q), F(q)b \big) \leqslant 0,$$

где $M(a, \varphi)$ — множество тех точек из Q, на которых достигается

$$\max_{q \in Q} \big\| F(q)a - \varphi(q) \big\|.$$

Теорема $3'$ (единственности). *Пусть линейная непрерывная оператор-функция $F(q)$ обладает свойством* a). *Для того чтобы для любой непрерывной на Q абстрактной функции $\varphi(q)$ существовала единственная наименее уклоняющаяся от нее функция $F(q)a$, достаточно, а в случае, когда $F(q)$ обладает еще* *свойством* b), *то и необходимо, чтобы для любого $b \neq \theta$ каждая абстрактная функция $F(q)b$ не обращалась в нуль (т.е. в нулевой элемент θ пространства H) ни в одной точке компакта Q.*

В нашей совместной работе [6] рассматривалась следующая задача. Пусть функции $\varphi(q)$ и (1) являются непрерывными абстрактными функциями со значениями в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве H, а коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ являются комплексными числами. Исследовать проблемы существования, единственности и характеристических свойств для задачи Чебышева о нахождении для каждой абстрактной функции $\varphi(q)$ наименее уклоняющегося от не на Q полинома $P_{\alpha^*}(q) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^* f_k(q)$, для которого достигается величина

$$\mathcal{E}_N(\varphi) = \inf_{\alpha} \max_{q \in Q} \big\| P_\alpha(q) - \varphi(q) \big\|.$$

Можно показать, что если пространство H бесконечномерно, то эта задача является частным случаем операторной задачи Чебышева, рассмотренной С.И. Зуховицким. Таким путем мы получили следующие результаты.

Теорема 1$''$ (существования). *Для каждой непрерывной на Q абстрактной функции $\varphi(q)$ существует полином $P_{\alpha^0}(q)$, наименее уклоняющийся от нее на Q, так что*

$$\mathcal{E}_N(\varphi) = \max_{q \in Q} \big\| P_{\alpha^0}(q) - \varphi(q) \big\| = \inf_{\alpha} \max_{q \in Q} \big\| P_\alpha(q) - \varphi(q) \big\|.$$

Теорема 2$''$ (обобщенный критерий Колмогорова). *Для того чтобы полином $P_\alpha(q)$ наименее уклонялся на Q от абстрактной функции $\varphi(q)$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого полинома $P_\beta(q)$ имело место неравенство*

$$\min_{q \in M(\alpha, \varphi)} \operatorname{Re} \big(P_\alpha(q) - \varphi(q), P_\beta(q) \big) \leqslant 0,$$

где $M(\alpha, \varphi)$ — множество тех точек из Q, на которых достигается

$$\max_{q \in Q} \big\| P_\alpha(q) - \varphi(q) \big\|.$$

Теорема 3$''$ (единственности). *Для того чтобы для любой непрерывной на Q абстрактной функции $\varphi(q)$ существовал единственный наименее уклоняющийся от нее полином $P_{\alpha^0}(q)$, необходимо и достаточно, чтобы каждый полином $P_\alpha(q) \not\equiv \theta$ не обращался в нуль ни в одной точке компакта Q.*

Остановимся специально на случае конечномерного (s-мерного) унитарного пространства. В этом случае существенную роль играют арифметические соотношения между числом N абстрактных функций (1) и размерностью пространства s.

Если $N \leqslant s$, то теоремы 1–3 сохраняются без изменений. Случай $N = ns$ $(n = 1, 2, \ldots)$ рассматривался ранее в [3]. Наконец, случай $(n-1)s < N < ns$ представляется нам новым. В этом случае теоремы 1$''$ и 2$''$ опять остаются без изменения, а теорема 3$''$ (единственности) имеет место тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

1) *каждый полином $P_\alpha(q) \not\equiv 0$ имеет на Q не более чем $n-1$ нулей;*

2) *для любых $n-1$ различных точек $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ из Q и любых $n-1$ элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ из H существует по крайней мере один полином $P_\alpha(q)$, для которого*

$$P_\alpha(q) = x_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

В работе [7] аналогичные задачи рассмотрены для случая, когда H есть банахово пространство. Нами доказано, что теорема 1$''$ не меняется, а теоремы единственности без изменений переносятся на строго выпуклые пространства в смысле Кларксона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Haar A.* Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen // Math. Ann. 1918. V. 78. P. 294.
2. *Колмогоров А.Н.* Замечание по поводу многочленов П.Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции // Успехи матем. наук. 1948. Т. 3, вып. 1(83). С. 216.
3. *Зуховицкий С.И., Крейн М.Г.* Замечание об одном возможном обобщении теорем А. Хаара и А.Н. Колмогорова // Успехи матем. наук. 1950. Т. 5, вып. 1(35). С. 217.
4. *Зуховицький С.І.* Про задачу Чебишевського наближення в просторі Гільберта // Доповіді АН УРСР. 1955. № 1. С. 7.
5. *Зуховицкий С.И.* Некоторые теоремы теории чебышевских приближений в пространстве Гильберта // Матем. сб. 1955. Т. 37, № 1(79). С. 3.
6. *Зуховицкий С.И., Стечкин С.Б.* О приближении абстрактных функций со значениями в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. 1956. Т. 106, № 3. С. 385.
7. *Зуховицкий С.И., Стечкин С.Б.* О приближении абстрактных функций со значениями в банаховом пространстве // Докл. АН СССР. 1956. Т. 106, № 5. С. 773.