О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ, РАСХОДЯЩИХСЯ В КАЖДОЙ ТОЧКЕ*)

Введение

Как хорошо известно, Н.Н. Лузин [3, 4] (см. также [5, с. 271; 6, с. 25]) впервые построил степенной ряд

$$S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

с коэффициентами, стремящимися к нулю, который расходится в каждой точке единичной окружности $|z| = 1$, и показал, что тригонометрический ряд

$$T_1(x) = \operatorname{Re} S_1(e^{ix})$$

расходится для почти всех x. Вскоре после этого Г. Штейнгауз [8] построил тригонометрический ряд

$$T(x) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

с действительными и стремящимися к нулю коэффициентами a_n и b_n, расходящийся в каждой точке.

В § 1 настоящей работы устанавливается, что сопряженные тригонометрические ряды с коэффициентами, стремящимися к нулю,

$$T_1(x) = \operatorname{Re} S_1(e^{ix}) \qquad \text{и} \qquad U_1(x) = \operatorname{Im} S_1(e^{ix}),$$

представляющие собою действительную и мнимую части степенного ряда Лузина $S_1(z)$ на окружности $z = e^{ix}$ $(0 \leqslant x < 2\pi)$, оба расходятся в каждой точке и даже имеют в каждой точке неограниченные частичные суммы.

Пользуясь теми же методами, я рассматриваю в § 2 следующую задачу: с какой скоростью могут стремиться к нулю коэффициенты пары сопряженных тригонометрических рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx),$$

расходящихся в каждой точке? В частности, в § 2 впервые дается доказательство следующей теоремы А.Н. Колмогорова.

Для любой последовательности положительных чисел $\{\alpha_n\}$, удовлетворяющей условиям $\alpha_n \downarrow 0$ и $\sum \alpha_n^2 = \infty$, существует тригонометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

с коэффициентами a_n, $b_n = O(\alpha_n)$, расходящийся в каждой точке.

---

*) Изв. АН СССР. Сер. матем. 1957. Т. 21. С. 711–728.

Основные результаты этой работы сообщались мною на заседании Московского математического общества 19 декабря 1950 г. [9] (см. также [5, с. 496; 6, с. 394]).

§ 1. О примере Н.Н. Лузина

1.1. Конструкция Н.Н. Лузина. Конструкция Н.Н. Лузина состоит в следующем. Он полагает

$$\Theta_p(z) = \sum_{\nu=0}^{p} z^{\nu}, \qquad H_p(z) = \sum_{\mu=0}^{p} z^{(p+1)\mu}\Theta_p\big(e^{-i\frac{2\pi\mu}{p+1}}z\big) \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\lambda_p = \sum_{\varkappa=1}^{p} \varkappa^2 \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

и определяет степенной ряд $S_1(z)$ посредством формулы

$$S_1(z) = H_0(z) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p}}\, z^{\lambda_p}\, H_p(z). \tag{1.1}$$

Как нетрудно проверить, этот ряд не содержит подобных членов и представляет собою степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n$$

с коэффициентами, стремящимися к нулю. Заменяя $H_p(z)$ и $\Theta_p(z)$ их значениями, получаем, что

$$S_1(z) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p}}\, z^{\lambda_p} \sum_{\mu=0}^{p} z^{(p+1)\mu} \sum_{\nu=0}^{p} e^{-i\frac{2\pi\mu\nu}{p+1}}\, z^{\nu} =$$

$$= 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{\mu=0}^{p}\sum_{\nu=0}^{p} e^{-i\frac{2\pi\mu\nu}{p+1}}\, z^{\lambda_p+(p+1)\mu+\nu}. \tag{1.2}$$

В силу этой формулы действительная и мнимая части ряда $S_1(z)$ на окружности $z = e^{ix}$ $(0 \leqslant x < 2\pi)$ представляются тригонометрическими рядами

$$T_1(x) = \operatorname{Re} S_1(e^{ix}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$$

$$= 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{\mu=0}^{p}\sum_{\nu=0}^{p} \cos\left\{\big(\lambda_p + (p+1)\mu + \nu\big)x - \frac{2\pi\mu\nu}{p+1}\right\}, \tag{1.3}$$

$$U_1(x) = \operatorname{Im} S_1(e^{ix}) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{\mu=0}^{p}\sum_{\nu=0}^{p} \sin\left\{\big(\lambda_p + (p+1)\mu + \nu\big)x - \frac{2\pi\mu\nu}{p+1}\right\}. \tag{1.4}$$

Понятно, что мы имеем формальное соотношение
$$S_1(e^{ix}) = T_1(x) + i\,U_1(x)$$
и что
$$a_n,\ b_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Введем в рассмотрение тригонометрические полиномы
$$t_{_{N,p}}(x,\gamma) = \sum_{k=0}^{p-1} \cos\bigl((N+k)x - \gamma k\bigr), \tag{1.5}$$
$$u_{_{N,p}}(x,\gamma) = \sum_{k=0}^{p-1} \sin\bigl((N+k)x - \gamma k\bigr). \tag{1.6}$$
В этих обозначениях формулы (1.3) и (1.4) принимают вид
$$T_1(x) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{\mu=0}^{p} t_{\lambda_p+(p+1)\mu,\ p+1}\left(x, \frac{2\pi\mu}{p+1}\right), \tag{1.7}$$
$$U_1(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{\mu=0}^{p} u_{\lambda_p+(p+1)\mu,\ p+1}\left(x, \frac{2\pi\mu}{p+1}\right). \tag{1.8}$$

Ряды $T_1(x)$ и $U_1(x)$ мы будем в дальнейшем называть *тригонометрическими рядами Лузина*. Цель этого параграфа — показать, что ряды $T_1(x)$ и $U_1(x)$ имеют в каждой точке неограниченные частичные суммы и, следовательно, расходятся в каждой точке. Для этого нам понадобится одна лемма о тригонометрических полиномах, к изложению которой мы и переходим.

1.2. Лемма о тригонометрических полиномах. Пусть p — натуральное число, ψ — произвольное действительное число и $\rho_k \geqslant 0$ $(k = 0, 1, \dots, p-1)$. Положим
$$Q_p(x,\psi) = \sum_{k=0}^{p-1} \rho_k\, \cos(kx + \psi) \tag{1.9}$$
и условимся называть *отрезком* этого полинома любой полином вида
$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \rho_k\, \cos(kx+\psi),$$
где $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant p-1$.

Лемма 1. *Пусть $p \geqslant p_0 = 24$ и*
$$\rho_k \geqslant \rho > 0 \qquad (k = 0, 1, \dots, p-1). \tag{1.10}$$
Каково бы ни было число x, удовлетворяющее условиям
$$\frac{\pi}{p} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{p}, \tag{1.11}$$
найдется отрезок полинома $Q_p(x,\psi)$, для которого
$$\left|\sum_{k=k_1}^{k_2} \rho_k\, \cos(kx+\psi)\right| \geqslant \frac{\rho\, p}{48}\,. \tag{1.12}$$

Здесь, естественно, $k_1 = k_1(x, \psi)$ и $k_2 = k_2(x, \psi)$.

Доказательство. Положим $\varphi_k = kx + \psi$ и исследуем поведение последовательности $\{\varphi_k\}$ $(k = 0, 1, \ldots, p-1)$ для x, удовлетворяющих условиям (1.11). Имеем

$$x = \frac{\vartheta}{p} \qquad (\pi \leqslant \vartheta \leqslant 3\pi). \tag{1.13}$$

Поэтому при увеличении k от 0 до $p-1$ последовательность $\{\varphi_k\}$ монотонно возрастает от $\varphi_0 = \psi$ до $\varphi_p = (p - 1/p)\,\vartheta + \psi$, и соседние точки φ_k находятся друг от друга на расстоянии ϑ/p.

Рассмотрим функцию $y = \cos\varphi$ для $\varphi \in I = [\varphi_0, \varphi_p]$. Так как по условию леммы $p \geqslant p_0 = 24$, а согласно (1.13) $\vartheta \geqslant \pi$, то для длины $|I|$ сегмента I имеем оценку

$$|I| = \varphi_p - \varphi_0 = \left(1 - \frac{1}{p}\right)\vartheta \geqslant \left(1 - \frac{1}{p_0}\right)\vartheta \geqslant \frac{23}{24}\,\pi\,.$$

Отсюда нетрудно усмотреть, что какова бы ни была “начальная фаза” $\varphi_0 = \psi$, сегмент I содержит целый сегмент I_+ длины $\pi/4$, на котором $\cos\varphi \geqslant 1/2$, или же целый сегмент I_- длины $\pi/4$, на котором $\cos\varphi \leqslant -1/2$. Возможен также случай, что I содержит и I_+, и I_-.

Пусть ради определенности I содержит сегмент I_+. Покажем, что всегда найдутся точки φ_k, принадлежащие сегменту I_+, и оценим число таких точек. Так как $p \geqslant p_0 = 24$ и расстояние между соседними точками φ_k равно $\vartheta/p \leqslant$ $\leqslant 3\pi/p$, то на сегмент I_+ длины $\pi/4$ точек φ_k попадает не менее чем

$$\left[\frac{\pi/4}{\vartheta/p}\right] \geqslant \left[\frac{\pi/4}{3\pi/p}\right] = \frac{p}{12} \geqslant \frac{p}{12} - 1 \geqslant \frac{p}{24}. \tag{1.14}$$

Обозначим через k_1 наименьший, а через k_2 — наибольший номер k, для которого $\varphi_k \in I_+$. Тогда в силу монотонности последовательности $\{\varphi_k\}$ $\varphi_k \in I_+$ для $k_1 \leqslant k \leqslant k_2$ и согласно (1.14)

$$k_2 - k_1 + 1 \geqslant \frac{p}{24}\,. \tag{1.15}$$

Отметим также, что так как $I_+ \subset I$, то $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant p-1$.

Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \rho_k\, \cos(kx + \psi) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \rho_k\, \cos\varphi_k.$$

Используя неравенство (1.10), оценку (1.15) и неравенство $\cos\varphi \geqslant 1/2$ $(\varphi \in I_+)$, получаем, что

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \rho_k\, \cos(kx + \psi) \geqslant \rho\,(k_2 - k_1 + 1)\,\frac{1}{2} \geqslant \frac{\rho\, p}{48}\,,$$

откуда непосредственно вытекает (1.12).

Если бы мы предположили, что I не содержит I_+, но зато содержит сегмент I_-, то аналогично предыдущему нашли бы номера k_1' и k_2', для которых

$$\sum_{k=k_1'}^{k_2'} \rho_k\, \cos(kx + \psi) \leqslant -\frac{\rho\, p}{48}\,,$$

откуда снова вытекает (1.12), и лемма полностью доказана.

Грубо говоря, эта лемма устанавливает, что для любого x из сегмента $|x - 2\pi/p| \leqslant \pi/p$ тригонометрический полином $Q_p(x, \psi)$ обладает достаточно большими отрезками.

Отметим, что доказательство леммы сохраняет силу и в том случае, когда ψ произвольным образом зависит от x и от p (но не зависит от k).

Заменяя в лемме 1 $p-1$ на p и полагая $\rho_k = 1$ $(k = 0, 1, \ldots, p)$, получаем такое

Следствие. *Пусть $p \geqslant 24$. Каково бы ни было число x, удовлетворяющее условиям*

$$\frac{\pi}{p+1} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{p+1},$$

найдется отрезок полинома

$$D_p(x, \psi) = \sum_{k=0}^{p} \cos(kx + \psi),$$

для которого

$$\left| \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos(kx + \psi) \right| \geqslant \frac{p+1}{48}\,.$$

1.3. Теорема 1. Теперь мы в состоянии доказать основную теорему этого параграфа.

Теорема 1. *Тригонометрические ряды Лузина $T_1(x)$ и $U_1(x)$ имеют в каждой точке неограниченные частичные суммы.*

Доказательство. Положим, как в следствии из леммы 1,

$$D_p(x, \psi) = \sum_{k=0}^{p} \cos(kx + \psi).$$

Тогда имеем

$$t_{\lambda_p+(p+1)\mu,\, p+1}\left(x,\, \frac{2\pi\mu}{p+1}\right) = \sum_{\nu=0}^{p} \cos\left\{ \left(\lambda_p + (p+1)\mu + \nu\right)x - \frac{2\pi\mu\nu}{p+1} \right\} =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{p} \cos\left\{ \nu\left(x - \frac{2\pi\mu}{p+1}\right) + \left(\lambda_p + (p+1)\mu\right)x \right\} =$$
$$= D_p\left(x - \frac{2\pi\mu}{p+1},\ \left(\lambda_p + (p+1)\mu\right)x\right) \qquad (1.16)$$

и, аналогично,

$$u_{\lambda_p+(p+1)\mu,\, p+1}\left(x,\, \frac{2\pi\mu}{p+1}\right) = D_p\left(x - \frac{2\pi\mu}{p+1},\ \left(\lambda_p + (p+1)\mu\right)x - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (1.17)$$

Поэтому в силу (1.7) и (1.8)

$$T_1(x) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{\mu=0}^{p} D_p\left(x - \frac{2\pi\mu}{p+1},\ \left(\lambda_p + (p+1)\mu\right)x\right),$$
$$U_1(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{\mu=0}^{p} D_p\left(x - \frac{2\pi\mu}{p+1},\ \left(\lambda_p + (p+1)\mu\right)x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, как ряд $T_1(x)$, так и ряд $U_1(x)$ является частным случаем ряда

$$L(x) = C + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{\mu=0}^{p} D_p\left(x - \frac{2\pi\mu}{p+1},\ \psi\right), \tag{1.18}$$

где ψ зависит от p, μ и x и удовлетворяет условию

$$\psi(x + 2\pi, p, \mu) \equiv \psi(x, p, \mu) \pmod{2\pi}.$$

Поэтому достаточно установить, что ряд $L(x)$ имеет в каждой точке неограниченные частичные суммы [1)].

Зафиксируем натуральное число $p \geqslant 24$ и рассмотрим отрезок

$$l_p(x) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{\mu=0}^{p} D_p\left(x - \frac{2\pi\mu}{p+1},\ \psi\right) \tag{1.19}$$

ряда $L(x)$. Покажем, что каково бы ни было число $x \in [0, 2\pi]$, найдется отрезок полинома $l_p(x)$, по модулю не меньший, чем $\sqrt{p}/48$. В силу периодичности $l_p(x)$, достаточно показать, что такой отрезок найдется для любого $x \in \in [\pi/(p+1),\ 2\pi + \pi/(p+1)]$. Зафиксируем произвольно число x из этого сегмента и подберем такое целое μ $(0 \leqslant \mu \leqslant p)$, чтобы

$$\left| x - \frac{2\pi(\mu+1)}{p+1} \right| \leqslant \frac{\pi}{p+1} \tag{1.20}$$

(если таких чисел μ имеется два, то возьмем какое-нибудь из них). Поскольку условие (1.20) эквивалентно неравенствам

$$\frac{\pi}{p+1} \leqslant x - \frac{2\pi\mu}{p+1} \leqslant \frac{3\pi}{p+1},$$

то в силу следствия из леммы 1 найдется отрезок полинома $D_p(x - 2\pi\mu/(p+1), \psi)$, для которого

$$\left| \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos\left\{ k\left(x - \frac{2\pi\mu}{p+1}\right) + \psi \right\} \right| \geqslant \frac{p}{48}\,.$$

Тогда при k_1 и k_2, соответствующих $\psi = \psi(x, p, \mu)$, отрезок полинома $l_p(x)$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos\left\{ k\left(x - \frac{2\pi\mu}{p+1}\right) + \psi(x, p, \mu) \right\}$$

является искомым, так как для него

$$\left| \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos\left\{ k\left(x - \frac{2\pi\mu}{p+1}\right) + \psi(x, p, \mu) \right\} \right| \geqslant \frac{\sqrt{p}}{48}\,. \tag{1.21}$$

Теперь остается только заметить, что, заставляя p пробегать все натуральные числа, начиная с $p_0 = 24$, мы получим для каждого $x \in [0, 2\pi]$ бесконечную последовательность непересекающихся отрезков ряда $L(x)$, удовлетворяющих неравенству (1.21). Теорема 1 доказана.

Отметим два следствия.

Следствие 1. *Тригонометрические ряды Лузина* (1.3) *и* (1.4) *расходятся в каждой точке.*

[1)] Заметим, что ряд $L(x)$, вообще говоря, не является обычным тригонометрическим рядом.

Следствие 2. *Степенной ряд $S_1(z)$ расходится в каждой точке единичной окружности.*

Это — теорема Лузина.

1.4. Замечания. Сделаем в связи с теоремой 1 несколько замечаний.

1) Повторяя дословно доказательство теоремы 1, находим, что тригонометрические ряды

$$T_2(x)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}\sum_{\mu=0}^{p}\sum_{\nu=0}^{p}\cos\Big\{\big(\lambda_p+(p+1)\mu+\nu\big)x-\frac{2\pi\mu\nu}{p+1}\Big\},$$

$$U_2(x)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}\sum_{\mu=0}^{p}\sum_{\nu=0}^{p}\sin\Big\{\big(\lambda_p+(p+1)\mu+\nu\big)x-\frac{2\pi\mu\nu}{p+1}\Big\}$$

расходятся в каждой точке, а степенной ряд

$$S_2(z)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}z^{\lambda_p}H_p(z)$$

— в каждой точке окружности $|z|=1$.

Эти ряды имеют несколько более простую структуру, чем ряды Лузина $S_1(z)$, $T_1(x)$ и $U_1(x)$, и их коэффициенты стремятся к нулю значительно быстрее. Однако теперь уже не утверждается, что частичные суммы этих рядов не ограничены в каждой точке.

2) При помощи леммы 1 нетрудно усмотреть, что тригонометрические ряды

$$T_3(x)=\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{\mu=0}^{p}\sum_{\nu=0}^{p}\frac{\cos\big\{\big(\lambda_p+(p+1)\mu+\nu\big)x-2\pi\mu\nu/(p+1)\big\}}{\ln\big(\lambda_p+(p+1)\mu+\nu\big)},$$

$$U_3(x)=\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{\mu=0}^{p}\sum_{\nu=0}^{p}\frac{\sin\big\{\big(\lambda_p+(p+1)\mu+\nu\big)x-2\pi\mu\nu/(p+1)\big\}}{\ln\big(\lambda_p+(p+1)\mu+\nu\big)}$$

расходятся в каждой точке. Отсюда в силу одной теоремы Харди [10] (см. также [1, § 3.71]) вытекает любопытное следствие. Именно: *тригонометрические ряды Лузина $T_1(x)$ и $U_1(x)$ не являются рядами Фурье. Тем более, степенной ряд $S_1(z)$ не принадлежит классу H_1.*

3) Ряды Лузина $T_1(x)$, $U_1(x)$ и $S_1(z)$ расходятся в том смысле, что не существует ни одной точки x (или $z=e^{ix}$), в которой частичные суммы ряда $T_1(x)$ или $U_1(x)$ стремятся к бесконечности определенного знака, а для некоторых $z=e^{ix}$ частичные суммы ряда $S_1(z)$ стремятся к бесконечности. Насколько нам известно, задача построения тригонометрического (или степенного) ряда с коэффициентами, стремящимися к нулю, который ни в одной точке x $(z=e^{ix})$ не сходился бы ни к конечному, ни к бесконечному значению, до сих пор не решена. Возможно, что такого рода ряды вовсе не существуют.

4) Чтобы получить тригонометрический ряд вида

$$\sum_{p=1}^{\infty}g(p)\sum_{\mu}\sum_{\nu=0}^{p}\cos\big\{\big(k(p,\mu)+\nu\big)x-\psi(p,\mu)\nu\big\},$$

расходящийся в каждой точке, нет надобности производить для каждого p суммирование по μ от 0 до p. Достаточно взять столько слагаемых, чтобы каждая точка $x \in [0, 2\pi]$ оказалась покрытой бесконечным числом сегментов, на которых колебания отрезков полиномов

$$g(p) \sum_{\nu=0}^{p} \cos\bigl\{ \bigl(k(p, \mu) + \nu\bigr)x - \psi(p, \mu)\nu \bigr\},$$

были больше абсолютной положительной константы. Мы воспользуемся этим соображением, чтобы получить в следующем параграфе более сильные результаты, чем теорема 1.

§ 2. Расходящиеся тригонометрические ряды с быстро убывающими коэффициентами

2.1. Постановка задачи. В этом параграфе рассматривается следующая задача: как быстро могут убывать коэффициенты пары сопряженных тригонометрических рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin nx - b_n \cos nx),$$

расходящихся в каждой точке?

Насколько нам известно, эта задача до сих пор не рассматривалась, однако имеется ряд работ, посвященных аналогичной задаче для степенных рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

на окружности $|z| = 1$.

Как отмечает Р.О. Кузьмин [2], для ряда Лузина $S_1(z)$

$$c_n = O\big(n^{-1/6}\big);$$

нетрудно также подсчитать, что для построенного в § 1 ряда $S_2(z)$

$$c_n = O\big(n^{-1/3}\big).$$

В 1916 г. Харди и Литтлвуд [11] (см. также [1, § 5.33]) построили степенной ряд с коэффициентами

$$c_n = O\big(n^{-1/2}\big),$$

расходящийся в каждой точке окружности $|z| = 1$. Далее, Недер [7] доказал следующую общую теорему.

Теорема Недера. *Какова бы ни была последовательность положительных чисел $\{\alpha_n\}$, удовлетворяющая условиям $\alpha_n \downarrow 0$ и $\sum \alpha_n^2 = \infty$, существует степенной ряд*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

с коэффициентами $c_n = O(\alpha_n)$, расходящийся в каждой точке окружности $|z| = 1$.

Наконец, Р.О. Кузьмин [2] дал новый, весьма простой способ построения степенных рядов с быстро убывающими коэффициентами, расходящихся в каждой точке единичной окружности.

Что же касается построения всюду расходящихся тригонометрических рядов с быстро убывающими коэффициентами, то А.Н. Колмогоров сообщил мне в 1942 г., что им установлена теорема, аналогичная теореме Недера.

Теорема Колмогорова. *Какова бы ни была последовательность положительных чисел $\{\alpha_n\}$, удовлетворяющая условиям $\alpha_n \downarrow 0$ и $\sum \alpha_n^2 = \infty$, существует тригонометрический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

с коэффициентами $a_n, b_n = O(\alpha_n)$, расходящийся в каждой точке.

Формулировка этой теоремы уже сообщалась ранее (см. [9]), но доказательство ее не было опубликовано. Ясно, что теорема Колмогорова содержит в себе в качестве следствия теорему Недера.

Здесь я обобщаю эту теорему Колмогорова и показываю, что какова бы ни была последовательность положительных чисел $\{\alpha_n\}$, удовлетворяющая условиям $\alpha_n \downarrow 0$ и $\sum \alpha_n^2 = \infty$, существует пара сопряженных тригонометрических рядов с коэффициентами $a_n, b_n = O(\alpha_n)$, расходящихся в каждой точке.

Сравнение нашего доказательства этой теоремы с доказательством теоремы Недера показывает, что при переходе от степенных рядов к тригонометрическим возникает ряд дополнительных трудностей. В частности, нам понадобится одна лемма о числовых рядах, которая в случае Недера сводится к тривиальному замечанию.

2.2. Лемма о числовых рядах.

Лемма 2. *Пусть функция $\varphi(u)$ $(u > 0)$ удовлетворяет условиям:*

$\varphi 1)$ $\varphi(u) > 0$, $\varphi(u) \to 0$ $(u \to +0)$;

$\varphi 2)$ $\varphi(u)$ *не убывает;*

$\varphi 3)$ *для любого* $a \geqslant 1$ $\varphi(au) \leqslant c_1(a)\,\varphi(u)$ $(0 < u \leqslant 1)$;

$\varphi 4)$ *ряд* $\sum \varphi(k^{-1})$ *сходится и*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \varphi(k^{-1}) \leqslant c_2\, n\, \varphi(n^{-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.1}$$

Далее, пусть $\alpha_n \downarrow 0$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\alpha_n) = \infty. \tag{2.2}$$

Тогда существует последовательность натуральных чисел $\{p_n\}$, обладающая следующими свойствами:

$p1)$ $p_n \leqslant p_{n+1}$ $\quad (n = 1, 2, \ldots)$;

$p2)$ $1/p_n \leqslant \alpha_{N_n}$, *где* $N_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$;

$p3)$ $\sum_{n=1}^{\infty} p_n\, \varphi(p_n^{-1}) = \infty$.

Для ориентировки: условие $p2)$ показывает, что p_n не слишком малы, а условие $p3)$ — что p_n не слишком велики. Таким образом, лемма утверждает, что можно одновременно удовлетворить обоим условиям.

Доказательство. Определим индуктивно возрастающую последовательность целых неотрицательных чисел $\{N_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Именно, положим $N_0 = 0$, и если числа $N_0, N_1, \ldots, N_{n-1}$ уже определены, то положим N_n равным наименьшему натуральному числу N, для которого

$$(N - N_{n-1})\, \alpha_{N} > 1.$$

Такое число N_n существует для любого $n = 1, 2, \ldots$ В самом деле, если бы для некоторого натурального n и всех $N > N_{n-1}$ выполнялось обратное неравенство

$$(N - N_{n-1})\alpha_{N} \leqslant 1,$$

то при $N \to \infty$ было бы $\alpha_{N} = O(N^{-1})$, что в силу условий $\varphi 3)$ и $\varphi 4)$ противоречит сходимости ряда $\sum \varphi(\alpha_n)$.

Итак,

$$(N - N_{n-1})\alpha_{N} \leqslant 1 \qquad (N_{n-1} < N < N_n), \tag{2.3}$$

$$(N_n - N_{n-1})\alpha_{N_n} > 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.4}$$

Положим
$$p_n = N_n - N_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \dots) \tag{2.5}$$
и покажем, что эта последовательность удовлетворяет всем требованиям леммы. Так как $\{N_n\}$ — возрастающая последовательность целых неотрицательных чисел, то числа p_n натуральные. Далее в силу (2.4)
$$\frac{1}{p_n} < \alpha_{N_n} \quad \text{для} \quad N_n = \sum_{k=1}^{n} p_k,$$
так что выполняется и условие $p2)$. Установим теперь монотонность последовательности $\{p_n\}$. Согласно (2.3) имеем
$$(N_n - 1 - N_{n-1})\, \alpha_{N_{n+1}} \leqslant 1, \tag{2.6}$$
откуда в силу (2.5) и монотонности последовательности $\{\alpha_n\}$
$$(p_n - 1)\, \alpha_{N_{n+1}} \leqslant 1.$$
С другой стороны,
$$p_{n+1}\, \alpha_{N_{n+1}} > 1,$$
откуда $p_{n+1} > p_n - 1$ и
$$p_{n+1} \geqslant p_n.$$

Остается доказать расходимость ряда $\sum p_n\, \varphi(p_n^{-1})$. Заметим предварительно, что из (2.6) вытекает оценка
$$(p_n - 1)\, \alpha_{N_n} \leqslant 1,$$
откуда
$$p_n\, \alpha_{N_n} \leqslant 1 + \alpha_{N_n} \leqslant 1 + \alpha_1 = c_3,$$
$$\alpha_{N_n} \leqslant \frac{c_3}{p_n} \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{2.7}$$

Оценим сверху сумму $\sum_{N=N_n}^{N_{n+1}-1} \varphi(\alpha_N)$. Имеем
$$\sum_{N=N_n}^{N_{n+1}-1} \varphi(\alpha_N) = \sum_{N=N_n}^{N_n+p_n-1} \varphi(\alpha_N) + \sum_{N=N_n+p_n}^{N_{n+1}-1} \varphi(\alpha_N) = S_1 + S_2.$$
Для суммы S_1, в силу монотонности $\{\alpha_n\}$, неравенства (2.7) и условий $\varphi2)$ и $\varphi3)$, имеем
$$S_1 = \sum_{N=N_n}^{N_n+p_n-1} \varphi(\alpha_N) \leqslant \sum_{N=N_n}^{N_n+p_n-1} \varphi(\alpha_{N_n}) = p_n\, \varphi(\alpha_{N_n}) \leqslant p_n\, \varphi\Big(\frac{c_3}{p_n}\Big) \leqslant c_4\, p_n\, \varphi(p_n^{-1}).$$
Для суммы S_2, используя $\varphi2)$, $\varphi4)$ и (2.3), получаем
$$S_2 = \sum_{N=N_n+p_n}^{N_{n+1}-1} \varphi(\alpha_N) \leqslant \sum_{N=N_n+p_n}^{N_{n+1}-1} \varphi\Big(\frac{1}{N - N_n}\Big) = \sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} \varphi(k^{-1}) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=p_n}^{\infty} \varphi(k^{-1}) \leqslant c_2\, p_n\, \varphi(p_n^{-1}).$$

Сопоставляя эти оценки, находим окончательно

$$\sum_{N=N_n}^{N_{n+1}-1} \varphi(\alpha_N) \leqslant c_5\, p_n\, \varphi(p_n^{-1}) \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Так как ряд $\sum \varphi(\alpha_N)$ расходится, то отсюда вытекает расходимость ряда $\sum p_n\, \varphi(p_n^{-1})$, и лемма полностью доказана.

Ясно, что в этой лемме можно, в частности, положить $\varphi(u) = u^2$. Поэтому справедливо такое

Следствие. *Пусть $\alpha_n \downarrow 0$ и $\sum \alpha_n^2 = \infty$. Тогда существует последовательность натуральных чисел $\{p_n\}$, обладающая следующими свойствами:*

1) $p_n \leqslant p_{n+1} \quad (n=1,2,\ldots)$;

2) $1/p_n \leqslant \alpha_{N_n}$, *где* $N_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-1} = \infty$.

2.3. Теорема 2. Докажем основную теорему этого параграфа.

Теорема 2. *Какова бы ни была последовательность положительных чисел $\{\alpha_n\}$, удовлетворяющая условиям $\alpha_n \downarrow 0$ и $\sum \alpha_n^2 = \infty$, найдется пара сопряженных тригонометрических рядов*

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$
$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx)$$

с коэффициентами

$$a_n,\, b_n = O(\alpha_n), \tag{2.8}$$

расходящихся в каждой точке.

Доказательство. Зафиксируем последовательность $\{\alpha_n\}$ и применим к ней следствие из леммы 2. Получаем, что существует последовательность натуральных чисел $\{p_n\}$, удовлетворяющая условиям

$$p_n \leqslant p_{n+1} \quad (n=1,2\ldots), \tag{2.9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-1} = \infty, \tag{2.10}$$

$$p_n^{-1} \leqslant \alpha_{N_n} \quad \text{для} \quad N_n = \sum_{k=1}^{n} p_k. \tag{2.11}$$

Так как $\alpha_N \to 0$ $(N \to \infty)$, то в силу (2.9) и (2.11)

$$p_n \uparrow \infty \quad (n \to \infty). \tag{2.12}$$

Кроме того, согласно определению последовательности $\{N_n\}$

$$N_{n-1} + p_n - 1 = N_n - 1 < N_n. \tag{2.13}$$

Далее, положим

$$\gamma_n = 2\pi \sum_{k=1}^{n} p_k^{-1} - 3\pi p_n^{-1} \tag{2.14}$$

и построим ряды

$$T(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}\,t_{N_{n-1},\,p_n}(x,\gamma_n),$$

$$U(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}\,u_{N_{n-1},\,p_n}(x,\gamma_n),$$

где $t_{N,\,p}(x,\gamma)$ и $u_{N,\,p}(x,\gamma)$ имеют те же значения, что и в § 1. Так как в силу (2.13) старшие члены полиномов $t_{N_{n-1},\,p_n}(x,\gamma_n)$ и $u_{N_{n-1},\,p_n}(x,\gamma_n)$ для любого натурального n имеют порядок, меньший порядка младших членов полиномов $t_{N_n,\ p_{n+1}}(x,\gamma_{n+1})$ и $u_{N_n,\ p_{n+1}}(x,\gamma_{n+1})$, то построенные ряды являются обычными тригонометрическими рядами.

Покажем, что эти ряды удовлетворяют всем требованиям теоремы.

Прежде всего, так как полиномы $t_{N,\ p}(x,\gamma)$ и $u_{N,\ p}(x,\gamma)$ являются сопряженными тригонометрическими полиномами, то и ряды $T(x)$ и $U(x)$ — сопряженные тригонометрические ряды.

Далее, оценим коэффициенты рядов $T(x)$ и $U(x)$. Имеем

$$|a_N|,\ |b_N|\leqslant\frac{1}{p_n}\quad\text{для}\quad N_{n-1}\leqslant N<N_n.$$

Используя (2.11) и монотонность последовательности $\{\alpha_N\}$, получаем отсюда

$$|a_n|,\ |b_n|\leqslant\frac{1}{p_n}\leqslant\alpha_{N_n}\leqslant\alpha_n\qquad(N_{n-1}\leqslant N<N_n,\quad n=1,2,\ldots),$$

т.е. нужное соотношение (2.8).

Докажем, что ряд $T(x)$ расходится в каждой точке. Зафиксируем произвольную точку $x_0\in[0,2\pi)$. Так как согласно (2.10) ряд $\sum p_n^{-k}$ расходится, то для любого целого неотрицательного l найдется такой номер n_l, что

$$2\pi\sum_{k=1}^{n_l-1}p_k^{-1}\leqslant x_0+2\pi l<2\pi\sum_{k=1}^{n_l}p_k^{-1}.$$

Вычитая из каждой части этих неравенств

$$\gamma_{n_l}+2\pi p_{n_l}^{-1}=2\pi\sum_{k=1}^{n_l}p_k^{-1}-\pi p_{n_l}^{-1}=2\pi\sum_{k=1}^{n_l-1}p_k^{-1}+\pi p_{n_l}^{-1},$$

получаем, что

$$-\pi p_{n_l}^{-1}\leqslant x_0+2\pi l-\gamma_{n_l}-2\pi p_{n_l}^{-1}<\pi p_{n_l}^{-1},$$

откуда

$$|x_0+2\pi l-\gamma_{n_l}-2\pi p_{n_l}^{-1}|\leqslant\pi p_{n_l}^{-1}.\tag{2.15}$$

Ясно, что $n_l\to\infty$ $(l\to\infty)$. Обозначим через l' наименьший номер l, обладающий тем свойством, что $p_{n_{l'}}\geqslant 24$, и рассмотрим полином

$$t_{N_{n_l-1},\,p_{n_l}}(x,\gamma_{n_l})=\sum_{k=0}^{p_{n_l}-1}\cos\bigl((N_{n_l-1}+k)x-\gamma_{n_l}k\bigr)=$$

$$=D_{p_{n_l}-1}(x-\gamma_{n_l},\ N_{n_l-1}x)\qquad(l\leqslant l').\tag{2.16}$$

Так как $x = x_0$ удовлетворяет условию (2.15), то согласно следствию из леммы 1 найдется отрезок полинома (2.16), для которого

$$\left|\sum_{k=k_1}^{k_2} \cos\bigl((N_{n_l-1}+k)x_0-\gamma_{n_l}k\bigr)\right| \geqslant \frac{p_{n_l}}{48}\,,$$

откуда

$$\left|\frac{1}{p_{n_l}}\sum_{k=k_1}^{k_2} \cos\bigl((N_{n_l-1}+k)x_0-\gamma_{n_l}k\bigr)\right| \geqslant \frac{1}{48}\,.$$

Но выражение под знаком модуля в этом неравенстве является отрезком ряда $T(x)$ для $x = x_0$. Мы имеем, следовательно, бесконечную последовательность отрезков этого ряда, на которых колебания не меньше $1/48$, откуда и вытекает расходимость ряда $T(x)$ для $x = x_0$.

Аналогично устанавливается расходимость ряда $U(x)$, и теорема полностью доказана.

Ясно, что эта теорема содержит в качестве следствий теоремы Колмогорова и Недера, сформулированные в п. 2.1.

В точности такими же рассуждениями можно доказать несколько более общую теорему.

Теорема 3. *Какова бы ни была последовательность положительных чисел $\{\alpha_n\}$, удовлетворяющая условиям $\alpha_n \downarrow 0$ и $\sum \alpha_n^2 = \infty$, существует степенной ряд*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n$$

с коэффициентами $c_n = O(\alpha_n)$ и такой, что для любого вещественного β тригонометрический ряд

$$T(x) = \mathrm{Re}\bigl\{e^{i\beta}\, S(e^{ix})\bigr\}$$

расходится в каждой точке.

2.4. Дополнительные замечания. Конструкция, использованная при доказательстве теоремы 2, может также служить для установления ряда родственных предложений. Мы укажем здесь некоторые из них. Поскольку доказательства этих предложений мало отличаются от доказательства теоремы 2, мы будем их только намечать, обращая внимания на те места, где имеются отличия.

Прежде всего, конструкцию теоремы 2 можно изменить так, чтобы частичные суммы рядов $T(x)$ и $U(x)$ были неограниченными в каждой точке. Для этого по заданной последовательности $\{\alpha_n\}$ находим последовательность $\{\alpha'_n\}$, обладающую теми же свойствами, что и $\{\alpha_n\}$, и, кроме того, удовлетворяющую условию

$$\alpha'_n = o(\alpha_n).$$

Далее, по последовательности $\{\alpha'_n\}$ строим, как и раньше, $\{p'_n\}$, $\{N'_n\}$, $\{\gamma'_n\}$ и полагаем

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{N'_n}\, t_{N'_{n-1},\,p'_n}(x,\gamma'_n),$$

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{N'_n}\, u_{N'_{n-1},\,p'_n}(x,\gamma'_n).$$

Тогда, очевидно,

$$a_n,\, b_n = o(\alpha_n).$$

Кроме того, рассуждая, как при доказательстве теоремы 2, получаем, что для каждого x_0 существует бесконечная последовательность отрезков ряда $T(x)$, каждый из которых принадлежит некоторому полиному $\alpha_{N'_{n_l}}\, t_{N'_{n_l-1},\, p'_{n_l}}(x, \gamma'_{n_l})$ и удовлетворяет условию

$$\left|\alpha_{N'_{n_l}} \sum_{k=k_1}^{k_2} \cos\bigl((N'_{n_l-1}+k)x_0 - \gamma'_{n_l}\, k\bigr)\right| \geqslant \alpha_{N'_{n_l}} \frac{p'_{n_l}}{48} = \\ = \frac{\alpha_{N'_{n_l}}}{\alpha'_{N'_{n_l}}} \frac{1}{48}\, \alpha'_{N'_{n_l}}\, p'_{n_l} \geqslant \frac{1}{48} \frac{\alpha_{N'_{n_l}}}{\alpha'_{N'_{n_l}}} \to \infty \qquad (l \to \infty),$$

так как $\alpha'_{N'_n}\, p'_n \geqslant 1$ и $\alpha_N / \alpha'_N \to \infty$. В силу этого $T(x)$ имеет для $x = x_0$ неограниченные частичные суммы. Аналогичное рассуждение проходит и для $U(x)$.

Переходим ко второму видоизменению теоремы 2. Недер [7] рассмотрел следующую задачу: пусть дан степенной ряд

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|\, e^{i\varphi_n} z^n.$$

При каких ограничениях на модули чисел c_n можно так распорядиться их аргументами φ_n, чтобы получить степенной ряд, расходящийся в каждой точке единичной окружности $|z| = 1$? Недер показал, что это всегда возможно при выполнении условия

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_n^*)^2 = \infty,$$

где

$$c_n^* = \min_{k=0,1,\ldots,n} |c_k|.$$

Рассмотрим аналогичную задачу для пар сопряженных тригонометрических рядов. Именно, покажем, что какова бы ни была последовательность положительных чисел $\{\rho_n\}$, для которой, полагая

$$\rho_n^* = \min_{k=0,1,\ldots,n} \rho_k,$$

будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\rho_n^*)^2 = \infty,$$

существует пара сопряженных тригонометрических рядов вида

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n\, \cos(nx - \varphi_n), \qquad U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n\, \sin(nx - \varphi_n),$$

расходящихся в каждой точке.

Для этого возьмем последовательность $\{\alpha_n\}$, удовлетворяющую условиям $\alpha_n \downarrow 0$, $\sum \alpha_n^2 = \infty$, $\alpha_n \leqslant \rho_n^*$, построим для нее последовательности $\{p_n\}$, $\{N_n\}$ и

$\{\gamma_n\}$ и положим

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=N_{n-1}}^{N_n - 1} \rho_k \, \cos\bigl((N_{n-1}+k)x - \gamma_n k\bigr), \tag{2.17}$$

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=N_{n-1}}^{N_n - 1} \rho_k \, \sin\bigl((N_{n-1}+k)x - \gamma_n k\bigr). \tag{2.18}$$

Нуждается в проверке лишь расходимость этих рядов, и она устанавливается точно так же, как в теореме 2, только вместо следствия из леммы 1 нужно воспользоваться самой леммой 1.

Аналогично тому, как это было сделано выше в связи с теоремой 2, можно также добиться того, чтобы частичные суммы рядов (2.17) и (2.18) были неограниченными в каждой точке.

Наконец, Недер доказал следующее предложение: какова бы ни была последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, существует степенной ряд

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, z^n,$$

расходящийся в каждой точке единичной окружности и такой, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{\lambda_n} < \infty.$$

Доказательство этого предложения Недер редуцирует к своей теореме, сформулированной нами в п. 2.1. Такая же редукция происходит и в рассматриваемом нами случае пары сопряженных тригонометрических рядов, и мы получаем, что какова бы ни была последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, существует пара сопряженных тригонометрических рядов, расходящихся в каждой точке и таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \bigl(|a_n|^2 + |b_n|^2\bigr) < \infty.$$

В заключении заметим, что все результаты п. 2.4 можно обобщить в духе теоремы 3; доказательства не меняются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. — М.—Л., 1939.
2. *Кузьмин Р.О.* О тригонометрических рядах, расходящихся повсюду // Тр. Ленингр. индустриального ин-та, раздел физ.-матем. 1936 Т. 10, вып. 3. С. 53–56.
3. *Лузин Н.Н.* Über eine Potenzreihe // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1911. V. 32. P. 386–390.
4. *Лузин Н.Н.* Об одном случае ряда Тейлора // Матем. сб. 1912. Т. 28. С. 295–302.
5. *Лузин Н.Н.* Интеграл и тригонометрический ряд. — М.—Л., 1951.
6. *Лузин Н.Н.* Собрание сочинений. Т. 1. — М., 1953.
7. *Neder L.* Zur Theorie der trigonometrischen Reihen // Mathem. Ann. 1921. V. 84. P. 117–136.
8. *Steinhaus H.* Une série trigonométrique partout divergente // Comptes Rendus de la Soc. Scient. de Varsovie. 1912. P. 219–229.

9. *Стечкин С.Б.* О сходимости и расходимости тригонометрических рядов // Успехи матем. наук. 1951. Т. 6, вып. 2(42). С. 148–149.
10. *Hardy G.H.* On the summability of Fourier series // Proc. London Math. Soc. 1913. V. 12. P. 365–372.
11. *Hardy G.H., Littlewood J.E.* Some Problems of Diophantine approximation: A remarkable trigonometrical series // Proc. Nat. Acad. Sc. USA. 1916. V. 2. P. 583–586.