НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДВУХ СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЙ*)

Введение

Вопрос о взаимоотношениях между модулем непрерывности $\omega(\delta, f)$ периодической функции $f(x)$ и ее наилучшими приближениями при помощи тригонометрических полиномов порядка не выше n (будем их обозначать $E_n(f)$) изучался различными авторами, среди которых в первую очередь следует указать Д. Джексона [17, 18], С.Н. Бернштейна [3, 5] и Ш. Валле Пуссена [21].

В частности, из их результатов вытекает ряд "теорем об эквивалентности", типичными примерами которых являются следующие предложения: при $0 < \alpha < 1$ соотношения

$$E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \text{и} \quad \omega(\delta, f) = O(\delta^\alpha),$$

а также соотношения

$$E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right) \quad \text{и} \quad \omega(\delta, f^{(r)}) = O(\delta^\alpha),$$

связывающие наилучшие приближения $f(x)$ с модулем непрерывности ее r-й производной, эквивалентны.

Интересный случай, когда $E_n(f) = O(1/n)$, не подходил под эти формулировки, так как в них существенно $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$.

Было известно, что $\omega(\delta, f) = O(\delta)$ влечет $E_n(f) = O(1/n)$, но обратное неверно. А. Зигмунд [23] первым обратил внимание на то, что и здесь можно получить формулировку в терминах эквивалентности, если только вместо обычных модулей непрерывности брать модули непрерывности второго порядка. Именно он доказал, что соотношения

$$E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{и} \quad \omega_2(\delta, f) = O(\delta)$$

являются эквивалентными, и это же верно для

$$E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{и} \quad \omega_2(\delta, f^{(k-1)}) = O(\delta).$$

С.Б. Стечкин [12] указал достаточные условия[1)], которые надо наложить на функцию $\varphi(\delta)$ для того, чтобы соотношения

$$E_n(f) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad \text{и} \quad \omega_k(\delta, f) = O[\varphi(\delta)] \tag{0.1}$$

---

*) Труды Моск. матем. общества. 1956. Т. 5. С. 483–522 (*совм. с Н.К. Бари*).

1) Можно показать, что эти условия равносильны тем, которые нами названы сейчас (S_k).

были эквивалентны. Он поставил новый вопрос, именно, когда соотношения [2)]

$$E_n(f) \sim \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{и} \quad \omega_k(\delta, f) \sim \varphi(\delta) \tag{0.2}$$

будут эквивалентны, и дал достаточные условия, накладываемые на функцию $\varphi(\delta)$ и в этом случае. Позднее, в работе [13] он доказал эквивалентность условий

$$E_n(f) \sim \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{и} \quad \omega_k(\delta, f^{(r)}) \sim \delta^{\alpha - r}$$

для всех целых k и r, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant r < \alpha,\ k + r > \alpha$.

С.М. Лозинский [8] нашел необходимое и достаточное условие, которое надо наложить на $\varphi(\delta)$ для того, чтобы при заданном k соотношения (0.1), а также и соотношения (0.2) были эквивалентны (это условие под названием (L_k) сформулировано в § 2).

Он нашел, кроме того, необходимое и достаточное условие для эквивалентности соотношений

$$E_n(f) = O\left[\frac{1}{n^r}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad \text{и} \quad \omega_k(\delta, f^{(r)}) = O[\varphi(\delta)],$$

а также

$$E_n(f) \sim \frac{1}{n^r}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{и} \quad \omega_k(\delta, f^{(r)}) \sim \varphi(\delta)$$

(оно сформулировано в § 2 под названием $(\mathfrak{L}_k)$).

Н.К. Бари [1] поставила вопрос об эквивалентности соотношений

$$E_n(f) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad \text{и} \quad E_n(\widetilde{f}) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

связывающих наилучшие приближения данной функции $f(x)$ и сопряженной к ней $\widetilde{f}(x)$. Она доказала, что для их эквивалентности необходимо и достаточно выполнения условия, которое мы сейчас называем условием (B) (см. § 2).

Это же условие (B) оказалось необходимым и достаточным для эквивалентности соотношений

$$E_n(f) = O\left[\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad \text{и} \quad E_n(f') = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Перейдем к вопросу о связи между модулями непрерывности функций $f(x)$ и $\widetilde{f}(x)$.

И.И. Привалов [11] (см. также [7, § 7.4]) доказал, что соотношения

$$\omega(\delta, f) = O(\delta^\alpha) \quad \text{и} \quad \omega(\delta, \widetilde{f}) = O(\delta^\alpha) \tag{0.3}$$

эквивалентны при $0 < \alpha < 1$. Случай $\alpha = 1$ был рассмотрен А. Зигмундом [23], который установил эквивалентность соотношений

$$\omega_2(\delta, f) = O(\delta) \quad \text{и} \quad \omega_2(\delta, \widetilde{f}) = O(\delta).$$

Кроме того, А. Зигмунд [22] дал обобщение теоремы И.И. Привалова (см. ниже (1.21)).

[2)] Символ $\sim$ понимается так: существуют две положительные константы A и B такие, что

$$A\varphi(\delta) \leqslant \omega_k(\delta, f) \leqslant B\varphi(\delta).$$

Наконец, Н.К. Бари [1] было доказано, что при выполнении условия $(\mathfrak{L}_k)$ соотношения
$$\omega_k(\delta, f) = O[\varphi(\delta)] \quad \text{и} \quad \omega_k(\delta, \widetilde{f}) = O[\varphi(\delta)]$$
эквивалентны. Вопрос о необходимости условия $(\mathfrak{L}_k)$ оставался открытым.

В настоящей работе мы доказываем две теоремы, из которых одна касается эквивалентности O-соотношений, другая — эквивалентности порядковых соотношений ($\sim$-соотношений) между наилучшими приближениями самой функции и ее производных, а также сопряженной функции и ее производных; указанные в них условия являются необходимыми и достаточными.

Кроме того, мы получаем O- и $\sim$-теоремы для соотношений между наилучшими приближениями функций $f(x)$, $\widetilde{f}(x)$ и их производных, а также их модулями непрерывности. Здесь вопрос решен не с той полнотой, как предыдущий, так как необходимость найденных условий подтверждена примерами не во всех случаях.

Наконец, нами найдено необходимое и достаточное условие справедливости "обобщенной теоремы Привалова", т.е. эквивалентности условий
$$\omega(\delta, f) = O[\varphi(\delta)] \quad \text{и} \quad \omega(\delta, \widetilde{f}) = O[\varphi(\delta)].$$

В § 1 мы формулируем ряд известных результатов, касающихся связи между наилучшими приближениями и модулями непрерывности как для данной функции и ее производных, так и для этой функции и сопряженной с нею. Для некоторых из сформулированных теорем мы даем новые доказательства, а также иногда и незначительные обобщения, так как этим материалом нам придется пользоваться ниже.

В § 2 мы доказываем две леммы об эквивалентности ряда условий на функцию $\varphi(\delta)$, которыми пользовались различные авторы в своих исследованиях. Этим устанавливаются новые связи между известными результатами.

В § 3 мы формулируем необходимое и достаточное условие для эквивалентности O-соотношений между $E_n(f)$, $E_n(f^{(p)})$, $E_n(\widetilde{f})$, $E_n(\widetilde{f}^{(q)})$, а также достаточные условия для эквивалентности O-соотношений между $E_n(f^{(p)})$ и $\omega_k(\delta, \widetilde{f}^{(q)})$, необходимость которых мы можем установить лишь в частных случаях.

В § 4 аналогичные задачи решаются для $\sim$-соотношений.

В § 5 дается необходимое и достаточное условие для справедливости обобщенной теоремы Привалова.

Мы считаем необходимым отметить здесь, что уже после подгтовки этой статьи для печати мы имели возможность послушать доклад С.М. Лозинского с полными доказательствами его теорем. Таким образом, мы узнали, что С.М. Лозинский доказывал некоторые теоремы так, как мы стали делать независимо от него, но позже. В соответствующих местах текста мы теперь отмечаем это в сносках.

§ 1. Модули непрерывности и наилучшие приближения

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция с периодом 2π и k — натуральное число. *Модулем непрерывности k-го порядка функции $f(x)$* называется функция
$$\omega_k(\delta, f) = \max_{|h| \leqslant \delta} \max_x |\Delta_h^k f(x)| \qquad (0 \leqslant \delta \leqslant \pi), \tag{1.1}$$

где

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x+jh)$$

— конечная разность k-го порядка функции $f(x)$ с шагом h. В случае $k=1$ мы будем говорить просто "модуль непрерывности функции $f(x)$" и обозначать его через $\omega(\delta, f)$.

Понятие модуля непрерывности является классическим, и его основные свойства излагаются в монографиях по теории приближения функций (см. [21] и [9], а также [10]). Модули непрерывности произвольного порядка были впервые введены С.Н. Бернштейном [3] и изучались А. Маршо [19] и С.Б. Стечкиным [12, 14].

Здесь мы перечислим те свойства модулей непрерывности, которые используются в дальнейшем тексте.

Пусть $\omega(\delta)$ $(0 \leqslant \delta \leqslant \pi)$ — заданная функция. Для того чтобы существовала непрерывная периодическая функция $f(x)$, для которой

$$\omega(\delta, f) = \omega(\delta) \qquad (0 \leqslant \delta \leqslant \pi),$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $\omega(\delta)$ удовлетворяла следующим условиям.

1°. $\omega(0) = 0$.

2°. $\omega(\delta)\uparrow$[3].

3°. $\omega(\delta)$ — непрерывная функция от δ.

4°. Если $\delta \geqslant 0$ и $\eta \geqslant 0$, то

$$\omega(\delta + \eta) \leqslant \omega(\delta) + \omega(\eta)$$

(см. [10]). В соответствии с этим, если некоторая функция $\omega(\delta)$ $(0 \leqslant \delta \leqslant \pi)$ удовлетворяет условиям 1°–4°, то мы будем называть ее *модулем непрерывности.*

5°. Если функция $\omega(\delta)$ удовлетворяет условиям 1°–3° и, кроме того, $\omega(\delta)/\delta \downarrow$, то она есть модуль непрерывности.

В самом деле, в силу условия $\omega(\delta)/\delta \downarrow$ имеем

$$\frac{\delta}{\delta+\eta}\omega(\delta+\eta) \leqslant \omega(\delta) \quad \text{и} \quad \frac{\eta}{\delta+\eta}\omega(\delta+\eta) \leqslant \omega(\eta),$$

откуда

$$\omega(\delta + \eta) \leqslant \omega(\delta) + \omega(\eta).$$

6°. Пусть $\varphi(\delta)$ удовлетворяет условиям

$$\varphi(\delta) \text{ непрерывна на } 0 \leqslant \delta \leqslant \pi, \ \ \varphi(\delta) \geqslant 0 \ \text{ и } \ \varphi(\delta)\uparrow. \tag{1.2}$$

Тогда существует функция $\varphi_1(\delta)$, удовлетворяющая тем же условиям и дополнительному условию $\varphi_1(\delta)/\delta \downarrow$, такая, что соотношения

$$\omega(\delta, f) = O[\varphi(\delta)] \quad \text{и} \quad \omega(\delta, f) = O[\varphi_1(\delta)]$$

эквивалентны; например, можно положить

$$\varphi_1(\delta) = \delta \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \frac{\varphi(\eta)}{\eta}$$

(см. [14]).

[3] Мы пишем $\uparrow$ для обозначения неубывающих функций и аналогично $\downarrow$ для невозрастающих.

Переходим к рассмотрению *свойств модулей непрерывности* высших порядков.

1. $\omega_k(0, f) = 0$.

2. $\omega_k(\delta, f) \uparrow$.

3. $\omega_k(\delta, f)$ — непрерывная функция от δ.

4. Если $0 < \delta < t \leqslant \pi$, то[4]

$$\frac{\omega_k(t, f)}{t^k} \leqslant A_k \frac{\omega_k(\delta, f)}{\delta^k}.$$

5. Если функция $f(x)$ имеет непрерывную r-ю производную $f^{(r)}(x)$, то для любого натурального k

$$\omega_{k+r}(\delta, f) \leqslant \delta^r \omega_k(\delta, f^{(r)}).$$

6. Пусть функция $\varphi(\delta)$ удовлетворяет условиям (1.2). Тогда соотношения

$$\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad \text{и} \quad \omega_k(\delta, f) = O[\varphi(\delta)],$$

а также соотношения

$$\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right) \sim \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{и} \quad \omega_k(\delta, f) \sim \varphi(\delta)$$

эквивалентны.

Первое утверждение доказывается в работе [14]; второе утверждение доказывается аналогично.

7. Либо $\omega_k(\delta, f) \equiv 0$, либо существует такая константа $C > 0$, что

$$\omega_k(\delta, f) \geqslant C\delta^k \qquad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Это непосредственно вытекает из монотонности $\omega_k(\delta, f)$ и свойства 4.

Напомним теперь ряд известных теорем, связывающих поведение модулей непрерывности и наилучших приближений функций $f(x)$, $\widetilde{f}(x)$ и их производных; эти теоремы нам понадобятся в дальнейшем.

(A) *Пусть $f(x)$ — периодическая функция, имеющая непрерывную r-ю производную $f^{(r)}(x)$. Тогда*

$$E_n(f) \leqslant \frac{A_1}{n^r} E_n(f^{(r)}) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.3}$$

и

$$E_n(\widetilde{f}) \leqslant \frac{A_2}{n^r} E_n(f^{(r)}) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1.4}$$

где A_1 и A_2 — абсолютные константы.

См. [15], а также [9, с. 119, 120]. Неравенство (1.4) выводится из теоремы Фавара (см. [24, с. 250, 251]).

(B) *Пусть r — натуральное число, $f(x)$ — непрерывная периодическая функция и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} E_n(f) < +\infty. \tag{1.5}$$

---

[4] Здесь и в дальнейшем A_k обозначает положительную константу, зависящую только от k, не обязательно одну и ту же.

Тогда $f(x)$ имеет непрерывную r-ю производную $f^{(r)}(x)$ и

$$
\begin{aligned}
&E_n(f^{(r)}) \leqslant A_r\Big\{n^r E_n(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1}E_\nu(f)\Big\} \qquad (n=1,2,\ldots),\\
&E_0(f^{(r)}) \leqslant A_r\Big\{E_0(f) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{r-1}E_\nu(f)\Big\},
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

где константа A_r зависит только от r.

Первое утверждение этой теоремы установлено С.Н. Бернштейном [3], а второе — С.Б. Стечкиным [12].

(C) *Пусть r — целое неотрицательное число, $f(x)$ — непрерывная периодическая функция и выполняется условие* (1.5). *Тогда сопряженная функция $\widetilde{f}(x)$ имеет непрерывную r-ю производную $\widetilde{f}^{(r)}(x)$ и*

$$
\begin{aligned}
&E_n(\widetilde{f}^{(r)}) \leqslant A_r\Big\{n^r E_n(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1}E_\nu(f)\Big\} \qquad (n=1,2,\ldots),\\
&E_0(\widetilde{f}^{(r)}) \leqslant A_r\Big\{E_0(f) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{r-1}E_\nu(f)\Big\},
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

где константа A_r зависит только от r.

В случае $r=0$ неравенство (1.7) принимает вид

$$
E_n(\widetilde{f}) \leqslant A\Big\{E_n(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu}E_\nu(f)\Big\} \qquad (n=0,1,2,\ldots). \tag{1.8}
$$

См. [15].

Для случая $r \neq 0$ мы дадим для формулы (1.7) новое доказательство, которое кажется нам интересным, потому что оно позволяет непосредственно оценивать приближения $\widetilde{f}^{(r)}(x)$ при помощи производных r-го порядка от полиномов, сопряженных к полиномам наилучшего приближения для $f(x)$. С этой целью мы докажем такую лемму.

Лемма 1. *Пусть r — натуральное число и для всякого n существует полином $T_n(x)$ порядка не выше n, для которого*

$$
|f(x) - T_n(x)| \leqslant G_n, \tag{1.9}
$$

где $G_n \downarrow 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1}G_n < +\infty$. Тогда у функции $\widetilde{f}(x)$ существуют непрерывные производные до порядка r включительно, и

$$
|\widetilde{f}^{(r)}(x) - \widetilde{T}_n^{(r)}(x)| \leqslant A_r\Big\{n^r G_n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1}G_\nu\Big\} \qquad (n=1,2,\ldots), \tag{1.10}
$$

где A_r — постоянная, зависящая только от r.

Доказательство. Рассмотрим для любого $n>0$ полином $T_{2^p n}(x)$, где $p=0,1,\ldots$ Ясно, что

$$
f(x) = T_n(x) + \sum_{p=0}^{\infty}\big(T_{2^{p+1}n}(x) - T_{2^p n}(x)\big), \tag{1.11}
$$

причем ряд в правой части (1.11) сходится равномерно в силу (1.9). Так как

$$|T_{2^{p+1}n}(x) - T_{2^pn}(x)| \leqslant |T_{2^{p+1}n}(x) - f(x)| + |f(x) - T_{2^pn}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant G_{2^{p+1}n} + G_{2^pn} \leqslant 2G_{2^pn}$$

в силу (1.9) и монотонности G_n, а $T_{2^{p+1}n}(x) - T_{2^pn}(x)$ есть тригонометрический полином порядка не выше $2^{p+1}n$, то, применяя аналог неравенства С.Н. Бернштейна для производной r-го порядка от сопряженного полинома (см. [20]), мы получаем

$$|\widetilde{T}^{(r)}_{2^{p+1}n}(x) - \widetilde{T}^{(r)}_{2^pn}(x)| \leqslant (2^{p+1}n)^r \cdot 2G_{2^pn} = 2^{r+1}(2^pn)^r G_{2^pn}.$$

Поэтому, если мы продифференцируем r раз почленно ряд

$$\widetilde{T}_n(x) + \sum_{p=0}^{\infty} \big(\widetilde{T}_{2^{p+1}n}(x) - \widetilde{T}_{2^pn}(x)\big),$$

являющийся сопряженным к ряду (1.11), то мы увидим, что он мажорируется рядом

$$2^{r+1}\sum_{p=0}^{\infty}(2^pn)^r G_{2^pn}.$$

Но мы знаем, что $\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1}G_n < +\infty$, и ясно, что

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1}G_\nu = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{\nu=2^pn+1}^{2^{p+1}n} \nu^{r-1}G_\nu \geqslant \sum_{p=0}^{\infty}(2^pn)^{r-1}G_{2^{p+1}n}\cdot 2^pn = \sum_{p=0}^{\infty}(2^pn)^r G_{2^{p+1}n}.$$

Поэтому

$$\sum_{p=0}^{\infty}(2^pn)^r G_{2^pn} = n^rG_n + \sum_{p=0}^{\infty}(2^{p+1}n)^r G_{2^{p+1}n} \leqslant n^rG_n + 2^r\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}G_\nu$$

и окончательно

$$2^{r+1}\sum_{p=0}^{\infty}(2^pn)^r G_{2^pn} \leqslant A_r\Big\{n^rG_n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}G_\nu\Big\},$$

где A_r зависит только от r.

Отсюда мы заключаем, что ряд

$$\widetilde{T}^{(r)}_n(x) + \sum_{p=0}^{\infty} \big(\widetilde{T}^{(r)}_{2^{p+1}n}(x) - \widetilde{T}^{(r)}_{2^pn}(x)\big)$$

сходится равномерно; ясно, что его сумма есть $\widetilde{f}^{(r)}(x)$, и притом

$$|\widetilde{f}^{(r)}(x) - \widetilde{T}^{(r)}_n(x)| \leqslant 2^{r+1}\sum_{p=0}^{\infty}(2^pn)^r G_{2^pn} \leqslant A_r\Big\{n^rG_n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}G_\nu\Big\},$$

и, значит, лемма доказана.

Следствие. *Если $r > 0$ и для некоторой $f(x)$ имеем*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1}E_n(f) < +\infty, \tag{1.5}$$

то

$$E_n(\widetilde{f}^{(r)}) \leqslant A_r \left\{ n^r E_n(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu(f) \right\} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.12}$$

Действительно, достаточно в предыдущей лемме положить $G_n = E_n(f)$, принять за $T_n(x)$ полином наилучшего приближения для $f(x)$ и заметить, что

$$E_n(\widetilde{f}^{(r)}) \leqslant \max_x |\widetilde{f}^{(r)}(x) - T_n^{(r)}(x)|.$$

(D) *Пусть* $f(x)$ — *непрерывная периодическая функция и* k — *натуральное число. Тогда*

$$E_n(f) \leqslant A_k \omega_k \left(\frac{1}{n+1}, f \right) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.13}$$

и, в частности,

$$E_n(f) \leqslant A_k \omega_k \left(\frac{1}{n}, f \right) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1.13*}$$

а также

$$\omega_k \left(\frac{1}{n}, f \right) \leqslant \frac{A_k}{n^k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_{\nu-1}(f) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.14}$$

См. [12]. В дальнейшем неравенство (1.13) мы будем называть *обобщенным неравенством Джексона*; Джексону [17] принадлежит случай $k = 1$.

Следует отметить, что неравенство (1.14) для пространств L_p $(1 < p < \infty)$ было впервые установлено А.Ф. Тиманом и М.Ф. Тиманом [16].

Комбинируя оценки (1.6) и (1.14), легко выводим, что если выполняется условие (1.5), то

$$\omega_k \left(\frac{1}{n}, f^{(r)} \right) \leqslant A_{k,r} \left\{ \frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r-1} E_{\nu-1}(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu(f) \right\}. \tag{1.15}$$

Это неравенство было доказано независимо друг от друга А.Ф. Тиманом [25] и С.Б. Стечкиным [12]. Здесь мы установим аналогичную оценку для модулей непрерывности сопряженной функции.

(E) *Пусть* $f(x)$ — *непрерывная периодическая функция,* k — *натуральное число,* r — *целое неотрицательное число и выполняется условие* (1.5). *Тогда*

$$\omega_k \left(\frac{1}{n}, \widetilde{f}^{(r)} \right) \leqslant A_{k,r} \left\{ \frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r-1} E_{\nu-1}(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu(f) \right\} \tag{1.16}$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

В частности, в случае $r = 0$ получаем

$$\omega_k \left(\frac{1}{n}, \widetilde{f} \right) \leqslant A_k \left\{ \frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_{\nu-1}(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} E_\nu(f) \right\} \tag{1.17}$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Доказательство. Согласно теореме (C) при выполнении условия (1.5) функция $\widetilde{f}^{(r)}(x)$ непрерывна и

$$E_n(\widetilde{f}^{(r)}) \leqslant A_r \left\{ n^r E_n(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu(f) \right\} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$E_0(\widetilde{f}^{(r)}) \leqslant A_r \left\{ E_0(f) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu(f) \right\}.$$

Кроме того, применяя неравенство (1.14) к функции $\widetilde{f}^{(r)}(x)$, получаем

$$\omega_k\left(\frac{1}{n}, \widetilde{f}^{(r)}\right) \leqslant \frac{A_k}{n^k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_{\nu-1}(\widetilde{f}^{(r)}) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Сопоставляя эти оценки, выводим

$$\omega_k\left(\frac{1}{n}, \widetilde{f}^{(r)}\right) \leqslant \frac{A_{k,r}}{n^k} \Bigg\{ E_0(f) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu(f) +$$

$$+ \sum_{\nu=2}^{n} \nu^{k-1} \left[(\nu-1)^r E_{\nu-1}(f) + \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \mu^{r-1} E_\mu(f) \right] \Bigg\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_{k,r}}{n^k} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r-1} E_{\nu-1}(f) + \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \mu^{r-1} E_\mu(f) \right\} =$$

$$= \frac{A_{k,r}}{n^k} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r-1} E_{\nu-1}(f) + \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} \left[\sum_{\mu=\nu}^{n} \mu^{r-1} E_\mu(f) + \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \mu^{r-1} E_\mu(f) \right] \right\} \leqslant$$

$$\leqslant A_{k,r} \left\{ \frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r-1} E_{\nu-1}(f) + \frac{1}{n^k} \sum_{\mu=1}^{n} \mu^{r-1} E_\mu(f) \sum_{\nu=1}^{\mu} \nu^{k-1} + \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \mu^{r-1} E_\mu(f) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant A_{k,r} \left\{ \frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r-1} E_{\nu-1}(f) + \frac{1}{n^k} \sum_{\mu=1}^{n} \mu^{k+r-1} E_\mu(f) + \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \mu^{r-1} E_\mu(f) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant A_{k,r} \left\{ \frac{1}{n^k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r-1} E_{\nu-1}(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu(f) \right\},$$

и теорема доказана.

Выведем из нее обобщение одной теоремы А. Зигмунда [22].

(F) *Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция, k и l — натуральные числа, r — целое неотрицательное число, причем $l > r$. Если сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} \omega_l\left(\frac{1}{n}, f\right), \tag{1.18}$$

то функция $\widetilde{f}^{(r)}(x)$ *непрерывна и*

$$\omega_k\left(\frac{1}{n}, \widetilde{f}^{(r)}\right) \leqslant A_{k,l,r}\left\{\frac{1}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}\omega_l\left(\frac{1}{\nu}, f\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\omega_l\left(\frac{1}{\nu}, f\right)\right\} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \quad (1.19)$$

Условие $l > r$ совершенно естественно, так как в противном случае в силу свойства 7 модулей непрерывности ряд (1.18) всегда расходится.

Для доказательства достаточно сопоставить теорему (E) с неравенством (1.13).

В частности, при $r = 0$, $l = k$ получаем

$$\omega_k\left(\frac{1}{n}, \widetilde{f}\right) \leqslant A_k\left\{\frac{1}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\omega_k\left(\frac{1}{\nu}, f\right) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\,\omega_k\left(\frac{1}{\nu}, f\right)\right\}.$$

В случае $k = 1$ отсюда получаем

$$\omega\left(\frac{1}{n}, \widetilde{f}\right) \leqslant A\left\{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\omega\left(\frac{1}{\nu}, f\right) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\,\omega\left(\frac{1}{\nu}, f\right)\right\}, \qquad (1.20)$$

что позволяет легко получить неравенство, установленное А. Зигмундом [22],

$$\omega(\delta, \widetilde{f}) \leqslant A\left\{\int_0^{\delta}\frac{\omega(t, f)}{t}\,dt + \delta\int_{\delta}^{\pi}\frac{\omega(t, f)}{t^2}\,dt\right\}. \qquad (1.21)$$

Действительно, используя монотонность функции $\omega(\delta, f)$, имеем

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\omega\left(\frac{1}{\nu}, f\right) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\,\omega\left(\frac{1}{\nu}, f\right) \leqslant$$

$$\leqslant A\left\{\frac{\omega(1, f)}{n+1} + \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n-1}\omega\left(\frac{1}{\nu+1}, f\right) + \sum_{\nu=n+2}^{\infty}\frac{1}{\nu+1}\,\omega\left(\frac{1}{\nu+1}, f\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant A\left\{\frac{1}{n+1}\int_1^{\pi}\frac{\omega(t, f)}{t^2}\,dt + \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n-1}\int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu}\frac{\omega(t, f)}{t^2}\,dt + \sum_{\nu=n+2}^{\infty}\int_{1/\nu}^{1/(\nu-1)}\frac{\omega(t, f)}{t}\,dt\right\} =$$

$$= A\left\{\frac{1}{n+1}\int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega(t, f)}{t^2}\,dt + \int_0^{1/(n+1)}\frac{\omega(t, f)}{t}\,dt\right\}. \quad (1.22)$$

Пусть $\delta \leqslant 1$ задано; находим такое n, что $1/(n+1) \leqslant \delta < 1/n$. Тогда из (1.20) и (1.22) получаем

$$\omega(\delta, \widetilde{f}) \leqslant \omega\left(\frac{1}{n}, \widetilde{f}\right) \leqslant A\left\{\frac{1}{n+1}\int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega(t, f)}{t^2}\,dt + \int_0^{1/(n+1)}\frac{\omega(t, f)}{t}\,dt\right\} \leqslant$$

$$\leqslant A\left\{\delta\int_{\delta}^{\pi}\frac{\omega(t, f)}{t^2}\,dt + \int_0^{\delta}\frac{\omega(t, f)}{t}\,dt\right\},$$

т.е. формула (1.21) доказана.

§ 2. Леммы о монотонных функциях

Условимся, прежде всего о терминологии и обозначениях.

Определение. Мы будем говорить, что функция $\varphi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$ *принадлежит классу* Φ, и писать $\varphi(t) \in \Phi$, если удовлетворены следующие условия:

1) $\varphi(t)$ непрерывна на $[0, \pi]$ [5];
2) $\varphi(t)\uparrow$;
3) $\varphi(t) \neq 0$ для любого t $(0 < t \leqslant \pi)$;
4) $\varphi(t) \to 0$ при $t \to 0$.

Следуя С.Н. Бернштейну [6], мы будем называть функцию $\varphi(t)$ *почти возрастающей* (соответственно *почти убывающей*) на $[a, b]$, если существует такое постоянное число A, что
$$\varphi(t_1) \leqslant A\varphi(t_2)$$
для $a \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant b$ в случае почти возрастания и соответственно
$$\varphi(t_1) \geqslant A\varphi(t_2)$$
для $a \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant b$ в случае почти убывания.

В частности, свойство 4) модулей непрерывности означает, что функция
$$\frac{\omega_k(\delta, f)}{\delta^k}$$
почти убывает.

В дальнейшем нам придется налагать на функцию $\varphi(\delta) \in \Phi$ некоторые из нижеперечисленных условий.

(B) $\displaystyle\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\,\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]$.

(Z) $\displaystyle\int_0^{\delta} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt = O[\varphi(\delta)]$.

(L) *Существует константа* $C > 1$ *такая, что*
$$\varliminf_{\delta\to 0} \frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)} > 1.$$

(S) *Существует константа* α $(0 < \alpha < 1)$ *такая, что функция* $\varphi(t)/t^{\alpha}$ *почти возрастает на* $[0, \pi]$.

(P) *Для любого* θ $(0 < \theta < 1)$ *существует такое целое* p, *что*
$$\varphi\left(\frac{1}{pn}\right) < \theta\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

(B_k) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right) = O\left[n^k\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]$.

(Z_k) $\displaystyle\int_{\delta}^{\pi} \frac{\varphi(t)}{t^{k+1}}\,dt = O\left[\frac{\varphi(\delta)}{\delta^k}\right]$.

(L_k) *Существует константа* $C > 1$ *такая, что*
$$\varlimsup_{\delta\to 0} \frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)} < C^k.$$

[5] Фактически непрерывность $\varphi(t)$ в доказательствах не используется.

(S_k) *Существует константа* α $(0 < \alpha < k)$ *такая, что функция* $\varphi(t)/t^{k-\alpha}$ *почти убывает.*

(P_k) *Для любого* $\theta < 1$ *можно найти такое целое* p, *что*

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right) < \theta p^k \varphi\left(\frac{1}{np}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Все эти условия естественно появляются в связи с исследованиями тех или иных теорем об эквивалентности.

Условия (B) и (B_k) были введены в работах Н.К. Бари [1] и [2]; условие (L_k), а также условие

$(\mathfrak{L}_k)$ *Существует константа* $C > 1$ *такая, что*

$$1 < \varliminf_{\delta\to 0} \frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)} \leqslant \varlimsup_{\delta\to 0} \frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)} < C^k,$$

впервые встречаются в работе С.М. Лозинского [8] (мы покажем, что оно равносильно совокупности условий (L) и (L_k)); условие, эквивалентное (S_k), рассматривалось С.Б. Стечкиным [12]; условие (S) введено нами по аналогии. Условия (Z) и (Z_k) ранее не встречались, но их естественно ввести в связи с работой А. Зигмунда [22]. Наконец, условия (P) и (P_k) мы ввели как вспомогательные.

Здесь мы покажем, что все условия (B), (Z), (L), (S) и (P), а также все условия (B_k), (Z_k), (L_k), (S_k) и (P_k) равносильны. Этот факт имеет важное значение, так как позволит нам в дальнейшем пользоваться той формой условия, которая будет наиболее удобна. Кроме того, равносильность этих условий устанавливает новые связи между известными результатами различных авторов [6].

Лемма 2. *Пусть* $\varphi(\delta) \in \Phi$. *Тогда все условия* (B), (Z), (L), (S) *и* (P) *равносильны* [7].

Мы поведем доказательство по схеме

$$(B) \to (Z) \to (L) \to (S) \to (P) \to (B).$$

Доказательство. (B) влечет (Z). Пусть $0 < \delta \leqslant 1$. Найдем натуральное число n такое, что $1/(n+1) \leqslant \delta < 1/n$. Используя монотонность $\varphi(t)$, получаем

$$\int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t}\,dt = \int_0^{1/(n+2)} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt + \int_{1/(n+2)}^{\delta} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt \leqslant \sum_{\nu=n+2}^{\infty} \int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt +$$
$$+ (n+2)\varphi(\delta)\left(\delta - \frac{1}{n+2}\right) \leqslant \varphi(\delta)\frac{2}{n} + \sum_{\nu=n+2}^{\infty} (\nu+1)\,\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right) =$$
$$= O[\varphi(\delta)] + \sum_{\nu=n+2}^{\infty} \frac{1}{\nu}\,\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right) = O[\varphi(\delta)] + O\left[\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)\right] = O[\varphi(\delta)].$$

(Z) влечет (L). Имеем в силу (Z)

$$\int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t}\,dt \leqslant A\varphi(\delta).$$

---

[6] Отметим, что интегралы, входящие в условия (Z) и (Z_k), уже встречались в работах Валле Пуссена (см. [21, гл. IV]).

[7] Отметим, что эквивалентность условий (B) и (L) была уже установлена в работе Н.К. Бари [1]. Здесь этот факт будет получен заново.

Пусть δ_1 любое, лишь бы $0 < \delta_1 < \delta$. Тогда

$$\int_{\delta_1}^{\delta} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt \leqslant A\varphi(\delta),$$

и в силу монотонности $\varphi(t)$ тем более

$$\varphi(\delta_1) \int_{\delta_1}^{\delta} \frac{dt}{t} = \varphi(\delta_1) \ln \frac{\delta}{\delta_1} \leqslant A\varphi(\delta).$$

Если

$$\ln \frac{\delta}{\delta_1} \geqslant 2A, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\delta}{\delta_1} \geqslant e^{2A},$$

то отсюда

$$\varphi(\delta_1) \leqslant \frac{1}{2}\,\varphi(\delta). \tag{2.1}$$

Положим $C = e^{2A}$, тогда в силу неравенства (2.1)

$$\varphi(C\delta) = \varphi(e^{2A}\delta) \geqslant 2\varphi(\delta) \quad \text{для} \quad \delta \leqslant \frac{\pi}{e^{2A}},$$

а поэтому

$$\frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)} \geqslant 2 \qquad \left(0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{e^{2A}}\right)$$

и, значит,

$$\varliminf_{\delta \to 0} \frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)} \geqslant 2 > 1,$$

т.е. (L) доказано.

(L) влечет (S). Условие (L) можно записать в таком виде: существует такое $C > 1$ и такое $\gamma > 1$, что

$$\varphi(C\delta) \geqslant \gamma\varphi(\delta) \qquad (\delta \leqslant \delta_0). \tag{2.2}$$

Не нарушая общности, можно считать $C > \gamma$, так как неравенство (2.2) только усилится, если C увеличить. Поэтому, полагая

$$\gamma = C^{\alpha}, \tag{2.3}$$

мы видим, что $0 < \alpha < 1$.

Пусть $\eta = C\delta$ и $\delta = \delta_0$. Тогда из (2.2) и (2.3)

$$\frac{\varphi(\delta)}{\delta^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{\gamma}\frac{\varphi(C\delta)}{\delta^{\alpha}} = \frac{1}{\gamma}\frac{\varphi(\eta)}{\eta^{\alpha}}\left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{\alpha} = \frac{1}{\gamma}\frac{\varphi(\eta)}{\eta^{\alpha}}C^{\alpha} = \frac{\varphi(\eta)}{\eta^{\alpha}}. \tag{2.4}$$

Пусть теперь $0 < \delta < \delta_1 \leqslant \delta_0$. Тогда находим такое целое $p \geqslant 0$, что

$$C^{p}\delta \leqslant \delta_1 < C^{p+1}\delta. \tag{2.5}$$

Имеем в силу (2.4) и (2.5)

$$\frac{\varphi(\delta)}{\delta^{\alpha}} \leqslant \frac{\varphi(C\delta)}{(C\delta)^{\alpha}} \leqslant \ldots \leqslant \frac{\varphi(C^{p}\delta)}{(C^{p}\delta)^{\alpha}} \leqslant \frac{\varphi(\delta_1)}{(C^{p+1}\delta)^{\alpha}}C^{\alpha} \leqslant \gamma\frac{\varphi(\delta_1)}{\delta_1^{\alpha}}$$

и, значит,

$$\frac{\varphi(\delta)}{\delta^{\alpha}} \leqslant \gamma\frac{\varphi(\delta_1)}{\delta_1^{\alpha}} \qquad (0 < \delta < \delta_1 \leqslant \delta_0),$$

а это и означает, что $\varphi(\delta)/\delta^{\alpha}$ почти возрастает, т.е. (S) выполнено.

(S) влечет (P). Действительно, если

$$\frac{\varphi(t_1)}{t_1^\alpha} \leqslant A\frac{\varphi(t_2)}{t_2^\alpha} \quad \text{для} \quad t_1 < t_2,$$

то, полагая $t_1 = 1/(np)$, $t_2 = 1/n$, найдем

$$n^\alpha p^\alpha \varphi\left(\frac{1}{np}\right) \leqslant A n^\alpha \varphi\left(\frac{1}{n}\right),$$

или

$$p^\alpha \varphi\left(\frac{1}{np}\right) \leqslant A \varphi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Взяв целое p так, чтобы $p^\alpha > A/\theta$, получаем

$$\varphi\left(\frac{1}{np}\right) < \theta\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \dots) \tag{2.6}$$

и, значит, (P) доказано.

(P) влечет (B). Имеем в силу монотонности $\varphi(1/n)$

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\nu=p^s n+1}^{p^{s+1}n} \frac{1}{\nu}\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right) \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{p^s n}\right) \sum_{\nu=p^s n+1}^{p^{s+1}n} \frac{1}{\nu} \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{p^s n}\right) \ln p.$$

Но в силу (2.6)

$$\varphi\left(\frac{1}{p^s n}\right) < \theta^s \varphi\left(\frac{1}{n}\right), \tag{2.7}$$

а поэтому

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{s=0}^{\infty}\theta^s\right] = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

и (B) доказано.

Лемма доказана полностью.

В дальнейшем при формулировке наших результатов мы будем пользоваться условием (B), не оговаривая каждый раз его эквивалентность с остальными условиями.

Замечание 1. Отметим следующий факт, доказательство которого проводится мгновенно.

Если $\varphi(\delta)$ удовлетворяет условию (L), то и $\delta^\alpha\varphi(\delta)$ для $\alpha \geqslant 0$ удовлетворяет тому же условию.

Действительно, если $F(\delta) = \delta^\alpha\varphi(\delta)$, то

$$\frac{F(C\delta)}{F(\delta)} = \frac{C^\alpha\delta^\alpha\varphi(C\delta)}{\delta^\alpha\varphi(\delta)} = C^\alpha\frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)} \geqslant \frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)}$$

при $\alpha \geqslant 0$, а поэтому существует $C > 1$, для которого

$$\varliminf_{\delta\to 0} \frac{F(C\delta)}{F(\delta)} > 1.$$

Лемма 3. *Пусть $\varphi(\delta) \in \Phi$. Тогда для любого фиксированного натурального k все условия (B_k), (Z_k), (L_k), (S_k) и (P_k) равносильны.*

Доказательство мы проведем по схеме

$$(B_k) \to (Z_k) \to (L_k) \to (S_k) \to (P_k) \to (B_k).$$

Доказательство.

(B_k) влечет (Z_k). Так как

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right) > \varphi(1) > 0,$$

а (B_k) означает, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right) < An^k\varphi\left(\frac{1}{n}\right), \tag{2.8}$$

то

$$n^k\varphi\left(\frac{1}{n}\right) > \frac{\varphi(1)}{A} = a > 0. \tag{2.9}$$

Используя это замечание, получим при $1/n \leqslant \delta < 1/(n-1)$

$$\int_\delta^\pi \frac{\varphi(t)}{t^{k+1}}\,dt \leqslant \int_{1/n}^{1} \frac{\varphi(t)}{t^{k+1}}\,dt + \int_1^\pi \frac{\varphi(t)}{t^{k+1}}\,dt = \sum_{\nu=1}^{n-1}\int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu} \frac{\varphi(t)}{t^{k+1}}\,dt + O(1) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)\int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu}\frac{dt}{t^{k+1}} + O(1) \leqslant \sum_{\nu=1}^{n}\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)\left(\frac{(\nu+1)^k-\nu^k}{k}\right) + O(1) =$$
$$= O\left[\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)\right] + O(1) = O\left[n^k\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] + O\left[n^k\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] = O\left[n^k\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

в силу (2.8) и (2.9), а поэтому

$$\delta^k\int_\delta^\pi \frac{\varphi(t)}{t^{k+1}}\,dt \leqslant \frac{1}{n^k}\,O\left[n^k\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] = O[\varphi(\delta)].$$

(Z_k) влечет (L_k). Прежде всего, установим, что при $0 \leqslant t \leqslant 1$ функция $\varphi(t)/t^k$ почти убывает. Пусть

$$\int_\delta^\pi \frac{\varphi(t)}{t^{k+1}}\,dt \leqslant A\frac{\varphi(\delta)}{\delta^k} \qquad (0 < \delta \leqslant 1) \tag{2.10}$$

и пусть $0 < \delta < \delta_1 \leqslant 1$. Имеем

$$\int_\delta^\pi \frac{\varphi(t)}{t^{k+1}}\,dt > \int_{\delta_1}^\pi \frac{\varphi(t)}{t^{k+1}}\,dt \geqslant \varphi(\delta_1)\int_{\delta_1}^\pi \frac{dt}{t^{k+1}} = \varphi(\delta_1)\left(\frac{1}{\delta_1^k} - \frac{1}{\pi^k}\right)\frac{1}{k},$$

откуда

$$\left(\frac{1}{\delta_1^k} - \frac{1}{\pi^k}\right)\varphi(\delta_1) \leqslant Ak\frac{\varphi(\delta)}{\delta^k}.$$

Поэтому

$$\frac{\varphi(\delta_1)}{\delta_1^k} \leqslant \frac{Ak}{1-(\delta_1/\pi)^k}\frac{\varphi(\delta)}{\delta^k} \leqslant M\frac{\varphi(\delta)}{\delta^k}, \tag{2.11}$$

где M постоянное и $\delta < \delta_1$.

Заметим, что из (2.10) и подавно следует

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\varphi(t)}{t^{k+1}}\,dt \leqslant A\frac{\varphi(\delta_1)}{\delta_1^k} \quad \text{для} \quad (\delta_1 < \delta_2 \leqslant 1),$$

а поэтому в силу (2.11)

$$\frac{\varphi(\delta_2)}{\delta_2^k}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{dt}{t} \leqslant M\int_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{\varphi(t)}{t^{k+1}}\,dt \leqslant \frac{MA\varphi(\delta_1)}{\delta_1^k},$$

значит,

$$\frac{\varphi(\delta_2)}{\delta_2^k}\ln\frac{\delta_2}{\delta_1} \leqslant MA\frac{\varphi(\delta_1)}{\delta_1^k},$$

откуда

$$\frac{\varphi(\delta_2)}{\delta_2^k} \leqslant \frac{1}{2}\frac{\varphi(\delta_1)}{\delta_1^k} \quad \text{для} \quad \frac{\delta_2}{\delta_1} \geqslant e^{2MA}. \tag{2.12}$$

Положим $C = e^{2MA}$, и пусть $\delta \leqslant 1/e^{2MA}$. Тогда, полагая $\delta = \delta_1$ и $C\delta = \delta_2$, видим, что $\delta_1 < \delta_2 \leqslant 1$, и в силу (2.12)

$$\frac{\varphi(C\delta)}{(C\delta)^k} \leqslant \frac{1}{2}\frac{\varphi(\delta)}{\delta^k},$$

откуда

$$\varlimsup_{\delta\to 0}\frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)} \leqslant \frac{1}{2}C^k < C^k,$$

а это и есть (L_k).

(L_k) влечет (S_k). Из (L_k) следует существование такого $C > 1$ и такого $\theta < 1$, что

$$\varphi(C\delta) < \theta C^k\varphi(\delta) \quad \text{при} \quad \delta \leqslant \delta_0. \tag{2.13}$$

Находим число α из условия $C^\alpha = 1/\theta$.

Ясно, что $\alpha > 0$ и, кроме того, $\alpha < k$, иначе $C^k\theta < 1$, а это противоречит (2.13), так как $\varphi(\delta)\uparrow$.

Пусть $\eta = C\delta$ и $\delta \leqslant \delta_0$. Тогда из (2.13) находим в силу $C^\alpha\theta = 1$

$$\frac{\varphi(\eta)}{\eta^{k-\alpha}} = \frac{\varphi(C\delta)}{(C\delta)^{k-\alpha}} < \frac{\theta C^k\varphi(\delta)}{C^{k-\alpha}\delta^{k-\alpha}} = \frac{\varphi(\delta)}{\delta^{k-\alpha}}. \tag{2.14}$$

Пусть теперь $0 < \delta < \delta_1 \leqslant \delta_0$. Находим такое $p \geqslant 0$, что

$$C^p\delta \leqslant \delta_1 < C^{p+1}\delta. \tag{2.15}$$

Тогда в силу (2.41) и (2.15)

$$\frac{\varphi(\delta_1)}{\delta_1^{k-\alpha}} < \frac{\varphi(C^{p+1}\delta)}{(C^p\delta)^{k-\alpha}} = \frac{C^{k-\alpha}\varphi(C^{p+1}\delta)}{(C^{p+1}\delta)^{k-\alpha}} \leqslant C^{k-\alpha}\frac{\varphi(\delta)}{\delta^{k-\alpha}} = \theta C^k\frac{\varphi(\delta)}{\delta^{k-\alpha}},$$

а поэтому

$$\frac{\varphi(\delta_1)}{\delta_1^{k-\alpha}} < \theta C^k\frac{\varphi(\delta)}{\delta^{k-\alpha}} \qquad (0 < \delta < \delta_1 \leqslant \delta_0),$$

т.е. $\varphi(\delta)/\delta^{k-\alpha}$ почти убывает, значит, (S_k) имеет место.

(S_k) влечет (P_k). Имеем

$$\frac{\varphi(t_1)}{t_1^{k-\alpha}} \geqslant \eta\frac{\varphi(t_2)}{t_2^{k-\alpha}} \quad \text{для} \quad t_1 < t_2.$$

Положим $t_1 = 1/(np)$, $t_2 = 1/n$. Тогда

$$n^{k-\alpha} p^{k-\alpha} \varphi\left(\frac{1}{np}\right) \geqslant \eta n^{k-\alpha} \varphi\left(\frac{1}{n}\right)$$

или

$$p^{k-\alpha} \varphi\left(\frac{1}{np}\right) \geqslant \eta \varphi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Пусть $\theta < 1$ задано. Возьмем p целым и столь большим, чтобы

$$\frac{1}{\eta p^{\alpha}} < \theta;$$

тогда

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right) < \theta p^k \varphi\left(\frac{1}{np}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2.16}$$

а это и есть (P_k).

(P_k) влечет (B_k). Пусть $\theta < 1$; в силу (P_k) существует такое целое p, что

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right) < \theta p^k \varphi\left(\frac{1}{np}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Пусть n задано; выберем s так, чтобы

$$p^s \leqslant n < p^{s+1}.$$

В силу $\varphi(\delta)\uparrow$ имеем

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} \varphi\left(\frac{1}{\nu}\right) \leqslant \sum_{l=0}^{s} \sum_{\nu=p^l}^{p^{l+1}-1} \nu^{k-1} \varphi\left(\frac{1}{\nu}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{s} \varphi\left(\frac{1}{p^l}\right) \sum_{\nu=p^l}^{p^{l+1}-1} \nu^{k-1} \leqslant \sum_{l=0}^{s} \varphi\left(\frac{1}{p^l}\right) (p^{l+1})^k.$$

Но, итерируя (2.16), получаем

$$\varphi\left(\frac{1}{p^l}\right) < (\theta p^k)^{s-l+1} \varphi\left(\frac{1}{p^{s+1}}\right) < \theta^{s-l+1} n^k p^k p^{-kl} \varphi\left(\frac{1}{n}\right),$$

а поэтому

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} \varphi\left(\frac{1}{\nu}\right) \leqslant n^k \varphi\left(\frac{1}{n}\right) p^k \sum_{l=0}^{s} \frac{\theta^{s-l+1}}{p^{kl}} (p^{l+1})^k = O\left[n^k \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

и, значит, (B_k) доказано.

Лемма доказана полностью.

Замечание 2. Если условие (B_k) выполнено, то тем более справедливо условие (B_{k+l}) для любого натурального l.

Это проще всего вывести из формы (S_k).

Замечание 3. Если $\varphi(\delta)$ удовлетворяет (B_k), то для любого целого l функция

$$F(\delta) = \delta^l \varphi(\delta)$$

удовлетворяет условию (B_{k+l}).

Действительно, в силу (S_k)

$$\frac{\varphi(t_1)}{t_1^{k-\alpha}} \geqslant \eta\frac{\varphi(t_2)}{t_2^{k-\alpha}} \quad \text{для} \quad t_1 < t_2;$$

поэтому

$$\frac{F(t_1)}{t_1^{k+l-\alpha}} = \frac{t_1^l\varphi(t_1)}{t_1^{k+l-\alpha}} = \frac{\varphi(t_1)}{t_1^{k-\alpha}} \geqslant \eta\frac{\varphi(t_2)}{t_2^{k-\alpha}} = \eta\frac{F(t_2)}{t_2^{k+l-\alpha}}.$$

Замечание 4. В работе [12] С.Б. Стечкин пользовался функциями $\varphi(\delta)$, которые он называл функциями сравнения порядка k, принадлежащими классу N_α для некоторого $\alpha < k$. Нетрудно видеть, что этот класс функций совпадает с классом функций $\varphi(\delta) \in \Phi$, удовлетворяющих условию (S_k).

Замечание 5. В своей работе [8] С.М. Лозинский пользовался условием $(\mathfrak{L}_k)$ (см. стр. 496). Покажем, что

Условие $(\mathfrak{L}_k)$ эквивалентно совокупности условий (L) и (L_k)[8]*.*

То, что $(\mathfrak{L}_k)$ влечет совокупность (L) и (L_k), очевидно. Но если для некоторой константы C_1 справедливо (L), а для другой константы C_2 справедливо (L_k), то надо еще доказать существование такой константы C, для которой (L) и (L_k) справедливы одновременно, т.е. имеет место $(\mathfrak{L}_k)$.

Чтобы убедиться в этом, заметим, что если (L) выполнено для C_1, то оно, очевидно, верно для всякого $C > C_1$ в силу $\varphi(t)\uparrow$. Для (L_k) такое утверждение уже не является справедливым, однако мы сейчас покажем, что если (L_k) верно для C_2, то оно верно и для всякого *достаточно большого* C.

В самом деле, если

$$\varlimsup_{\delta\to 0}\frac{\varphi(C_2\delta)}{\varphi(\delta)} < C_2^k,$$

то существует такое $\theta < 1$, что

$$\varphi(C_2\delta) \leqslant \theta C_2^k\varphi(\delta) \quad \text{для} \quad \delta \leqslant \delta_0. \tag{2.17}$$

Найдем такое m, что

$$\theta^{m+1}C_2^k < \frac{1}{2},$$

и положим $C_0 = C_2^m$; докажем, что тогда (L_k) будет справедливо при любом $C \geqslant C_0$. В самом деле, существует такое $p \geqslant m$, что $C_2^p \leqslant C < C_2^{p+1}$.

Имеем теперь для любого $\delta \leqslant \delta_0/C^p$, итерируя (2.17),

$$\frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)} < \frac{\varphi(C_2^{p+1}\delta)}{\varphi(\delta)} \leqslant (\theta C_2^k)^{p+1} = \theta^{p+1}(C_2^p)^kC_2^k \leqslant (\theta^{m+1}C_2^k)C^k < \frac{1}{2}C^k$$

и, значит,

$$\varlimsup_{\delta\to 0}\frac{\varphi(C\delta)}{\varphi(\delta)} \leqslant \frac{1}{2}C^k < C^k,$$

т.е. для этого C имеет место (L_k).

Теперь уже ясно, что выбрав C достаточно большим, можно добиться, чтобы для него удовлетворялись одновременно (L) и (L_k), т.е. для него справедливо условие $(\mathfrak{L}_k)$.

[8] Этот факт был уже установлен С.М. Лозинским (см. конец введения к настоящей статье).

§ 3. Теоремы об эквивалентности O-соотношений

Как уже говорилось во введении, С.М. Лозинский [8] рассмотрел вопрос об эквивалентности соотношений вида

$$E_n(f) = O\left[\frac{1}{n^r}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad \text{и} \quad \omega_k(\delta, f^{(r)}) = O[\varphi(\delta)]$$

и показал, что для этого необходимо и достаточно выполнения условия $(\mathfrak{L}_k)$, или, что то же, условий (L) и (L_k) (см. замечание 5 в § 2). Из его результатов непосредственно вытекает, что соотношения

$$E_n(f) = O\left[\frac{1}{n^r}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad \text{и} \quad E_n(f^{(r)}) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

эквивалентны при тех же условиях.

Здесь мы покажем, что эквивалентность этих соотношений, а также соответствующих соотношений для сопряженной функции, имеет место уже при одном условии (L), и докажем его необходимость.

Теорема 1. *Пусть $\varphi(\delta) \in \Phi$ и r — целое неотрицательное число. Если $\varphi(\delta)$ удовлетворяет условию (B), то все соотношения*

$$E_n(f^{(p)}) = O\left[\frac{1}{n^{r-p}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \qquad (p = 0, 1, \ldots, r), \tag{3.1}$$

$$E_n(\widetilde{f}^{(q)}) = O\left[\frac{1}{n^{r-q}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \qquad (q = 0, 1, \ldots, r) \tag{3.2}$$

эквивалентны[9].

Доказательство. Пусть $\varphi(\delta)$ удовлетворяет условию (B) и пусть для некоторого p $(0 \leqslant p \leqslant r)$ имеем

$$E_n(\psi) = O\left[\frac{1}{n^{r-p}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad \text{где } \psi = f^{(p)} \text{ или } \psi = \widetilde{f}^{(p)}.$$

В силу теорем (B) и (C) (см. § 1) для $n = 1, 2, \ldots$

$$E_n(\psi^{(r-p)}) \leqslant A\left\{n^{r-p}E_n(\psi) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-p-1}E_\nu(\psi)\right\} \qquad (r > p),$$

$$E_n(\widetilde{\psi}^{(r-p)}) \leqslant A\left\{n^{r-p}E_n(\psi) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-p-1}E_\nu(\psi)\right\} \qquad (r \geqslant p).$$

Пользуясь этими оценками (первой только при $r > p$) и учитывая условие (B), получим

$$E_n(\psi^{(r-p)}) = O\left\{n^{r-p}\frac{1}{n^{r-p}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-p-1}\frac{1}{\nu^{r-p}}\,\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\} =$$

$$= O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\,\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)\right] = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

[9] Случаи $r = 0$ и $r = 1$ были уже рассмотрены в работе Н.К. Бари [1].

Итак,

$$E_n(f^{(r)}) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right], \tag{3.3}$$

$$E_n(\widetilde{f}^{(r)}) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{3.4}$$

Далее, в силу теоремы (A) § 2

$$E_n(\psi) \leqslant \frac{A}{n^{r-p}} E_n(\psi^{(r-p)}) \qquad (0 \leqslant p < r).$$

Полагая здесь $\psi = f^{(p)}$ или $\psi = \widetilde{f}^{(p)}$ и используя (3.3) и (3.4), выводим

$$E_n(f^{(p)}) = O\left[\frac{1}{n^{r-p}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad \text{и} \quad E_n(\widetilde{f}^{(p)}) = O\left[\frac{1}{n^{r-p}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

для $0 \leqslant p \leqslant r$.

Таким образом, если $\varphi(\delta)$ удовлетворяет условию (B), то любое из соотношений (3.1) или (3.2) влечет все остальные, значит, все они эквивалентны и теорема доказана.

Теорема 2. *Условие (B) является необходимым для того, чтобы все соотношения (3.1) и (3.2) были эквивалентны. Точнее, если $\varphi(\delta) \in \Phi$, но условие (B) не выполнено, то:*

1) *можно найти такую функцию $f(x)$, что*

$$E_n(f) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

а

$$E_n(\widetilde{f}) \neq O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right];$$

2) *можно для любого $r > 0$ найти такую функцию $f(x)$, что соотношения (3.1) и (3.2) справедливы при $0 \leqslant p < r$, $0 \leqslant q < r$, но при $p = q = r$ одно из них справедливо, а другое нарушается, например,*

$$E_n(f^{(r)}) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

а

$$E_n(\widetilde{f}^{(r)}) \neq O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Если $\widetilde{f}^{(r)}(x)$ не существует или разрывна, то мы также будем писать $E_n(\widetilde{f}^{(r)}) \neq O[\varphi(1/n)]$.

Доказательство. Допустим, что $\varphi(\delta) \in \Phi$, но не удовлетворяет условию (B). Рассмотрим функцию

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \sin nx.$$

В работе Н. К. Бари [1] было доказано, что

$$E_n(g) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad \text{и} \quad E_n(\widetilde{g}) \neq O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Таким образом, утверждение 1) нашей теоремы справедливо.

Для доказательства 2) положим

$$f^{(r)}(x) = g(x).$$

Тогда

$$E_n(f^{(r)}) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right], \qquad E_n(\widetilde{f}^{(r)}) \neq O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

и вместе с тем на основании теоремы (A) § 1

$$E_n(f^{(p)}) = O\left[\frac{1}{n^{r-p}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right], \qquad E_n(\widetilde{f}^{(q)}) = O\left[\frac{1}{n^{r-q}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

для любых p и q, $0 \leqslant p < r$, $0 \leqslant q < r$.

Теорема полностью доказана.

В частности, отсюда вытекает, что если $\varphi(\delta) \in \Phi$, но не удовлетворяет условию (B), то можно найти такую функцию $f(x)$, что

$$E_n(f) = O\left[\frac{1}{n^r}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad \text{но} \quad E_n(f^{(r)}) \neq O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Переходим теперь к исследованию условий эквивалентности O-соотношений между наилучшими приближениями и модулями непрерывности двух сопряженных функций и их производных. Для этого нам понадобится

Лемма 4. *Пусть $\varphi(\delta) \in \Phi$ и удовлетворяет условию (B_k). Тогда соотношения*

$$E_n(f) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \tag{3.5}$$

и

$$\omega_k(\delta, f) = O[\varphi(\delta)] \tag{3.6}$$

эквивалентны[10].

Доказательство. По обобщенной теореме Джексона

$$E_n(f) = O\left[\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right)\right],$$

откуда ясно, что (3.6) влечет (3.5). С другой стороны, согласно (1.14)

$$\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqslant \frac{A_k}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}E_{\nu-1}(f);$$

но

$$\frac{1}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}E_{\nu-1}(f) = \frac{1}{n^k}\left\{E_0(f) + \sum_{\nu=1}^{n-1}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(f)\right\} =$$

$$= O\left(\frac{1}{n^k}\right) + O\left[\frac{1}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)\right] = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

[10] Этот результат (в форме (S_k)) был получен С.Б. Стечкиным (см. [12, теорема 9]), а в терминах (L_k) составляет "положительную" часть теоремы 1 С.М. Лозинского [8]. В работе Н.К. Бари [2] дано доказательство этой теоремы и ее аналог для случая, когда модуль непрерывности и наилучшие приближения рассматриваются на отрезке $[a, b]$ длины, меньшей чем 2π.

в силу условия (B_k) и вытекающего из него неравенства (2.9), а поэтому

$$\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Наконец, в силу свойства 6 модулей непрерывности

$$\omega_k(\delta, f) = O[\varphi(\delta)],$$

и лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть k — натуральное, r — целое неотрицательное число, $\varphi(\delta) \in \Phi$ и удовлетворяет условиям (B) и (B_k). Тогда все соотношения*

$$E_n(f^{(p)}) = O\left[\frac{1}{n^{r-p}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \qquad (p = 0, \ldots, r), \tag{3.7}$$

$$E_n(\widetilde{f}^{(q)}) = O\left[\frac{1}{n^{r-q}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \qquad (q = 0, \ldots, r), \tag{3.8}$$

$$\omega_{k+r-s}(\delta, f^{(s)}) = O[\delta^{r-s}\,\varphi(\delta)] \qquad (s = 0, \ldots, r), \tag{3.9}$$

$$\omega_{k+r-m}(\delta, \widetilde{f}^{(m)}) = O[\delta^{r-m}\,\varphi(\delta)] \qquad (m = 0, \ldots, r) \tag{3.10}$$

эквивалентны[11].

Доказательство. Эквивалентность всех соотношений (3.7) и (3.8) имеет место при выполнении одного условия (B), как было показано в теореме 1. Обозначая $\psi(x) = f^{(p)}(x)$ или $\psi(x) = \widetilde{f}^{(p)}(x)$, выводим на основании леммы 4, что соотношения

$$E_n(\psi) = O\left[\frac{1}{n^{r-p}}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad \text{и} \quad \omega_{k+r-p}(\delta, \psi) = O[\delta^{r-p}\varphi(\delta)]$$

эквивалентны, если функция

$$F_{r-p}(\delta) = \delta^{r-p}\varphi(\delta)$$

удовлетворяет условию (B_{k+r-p}). Но так как $r - p = l \geqslant 0$, то это действительно имеет место (см. замечание 1 в § 2).

Таким образом, каждое из условий (3.7) эквивалентно соответствующему условию (3.9) и аналогично для (3.8) и (3.10). Значит, все соотношения (3.7), (3.8), (3.9) и (3.10) эквивалентны, и теорема доказана.

В частности, для случая $\varphi(\delta) = \delta^\alpha$ $(0 < \alpha < k)$ из этой теоремы вытекает, что все соотношения

$$E_n(f^{(p)}) = O\left(\frac{1}{n^{r-p+\alpha}}\right) \qquad (0 \leqslant p \leqslant r),$$

$$E_n(\widetilde{f}^{(q)}) = O\left(\frac{1}{n^{r-q+\alpha}}\right) \qquad (0 \leqslant q \leqslant r),$$

$$\omega_{k+r-s}(\delta, f^{(s)}) = O(\delta^{r-s+\alpha}) \qquad (0 \leqslant s \leqslant r),$$

$$\omega_{k+r-m}(\delta, \widetilde{f}^{(m)}) = O(\delta^{r-m+\alpha}) \qquad (0 \leqslant m \leqslant r)$$

[11] Эквивалентность соотношений (3.7) и (3.9) вытекает из теоремы 2 С.М. Лозинского [8], а доказательство эквивалентности соотношений $\omega_k(\delta, f) = O[\varphi(\delta)]$ и $\omega_k(\delta, \widetilde{f}) = O[\varphi(\delta)]$ было дано Н.К. Бари (см. теорему 8 работы [1]).

эквивалентны.

Вопрос о необходимости условий теоремы 3 можно ставить по-разному. Именно, можно выделять из всех соотношений (3.7), (3.8), (3.9) и (3.10) различные группы и исследовать, какие условия необходимы для эквивалентности соотношений из выбранной группы.

Для группы, состоящей из соотношений (3.7) и (3.8), этот вопрос уже рассмотрен выше (теорема 2): для их эквивалентности необходимо и достаточно выполнения условия (B).

Для группы, состоящей из соотношений

$$E_n(f) = O\left[\frac{1}{n^r}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad \text{и} \quad \omega_k(\delta, f^{(r)}) = O[\varphi(\delta)],$$

С. М. Лозинским установлена теорема о том, что для их эквивалентности необходимо и достаточно выполнения условия $(\mathfrak{L}_k)$, т.е. совокупности условий (L) и (L_k). Отсюда, в частности, вытекает, что условия (B) и (B_k) и необходимы для эквивалентности в с е х соотношений (3.7), (3.8), (3.9) и (3.10).

Относительно группы соотношений вида

$$\omega_k(\delta, f) = O[\varphi(\delta)] \quad \text{и} \quad \omega_k(\delta, \widetilde{f}) = O[\varphi(\delta)]$$

можно сказать следующее.

Если условие (B) нарушено, а условие (B_k) выполнено, то существует такая функция $f(x)$, что

$$\omega_k(\delta, f) = O[\varphi(\delta)], \quad a \quad \omega_k(\delta, \widetilde{f}) \neq O[\varphi(\delta)]. \tag{3.11}$$

Действительно, строим $f(x)$ так, чтобы

$$E_n(f) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad \text{а} \quad E_n(\widetilde{f}) \neq O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

что возможно на основании теоремы 2.

В силу леммы 4, так как $\varphi(\delta)$ удовлетворяет (B_k), то отсюда

$$\omega_k(\delta, f) = O[\varphi(\delta)],$$

а с другой стороны, по обобщенной теореме Джексона

$$\omega_k(\delta, \widetilde{f}) \neq O[\varphi(\delta)].$$

К сожалению, мы не умеем доказывать такое же предложение, если условие (B_k) нарушено, а (B) выполнено, или оба нарушены. Однако в § 5 будет показано, что при нарушении хотя бы одного из условий (B) или (B_k) найдется $f(x)$, для которой

$$\omega(\delta, f) = O[\varphi(\delta)] \quad \text{и} \quad \omega(\delta, \widetilde{f}) = O[\varphi(\delta)].$$

§ 4. Теоремы об эквивалентности $\sim$-соотношений

Результаты этого параграфа аналогичны результатам § 3.

Начнем с рассмотрения условий эквивалентности $\sim$-соотношений для наилучших приближений функций $f(x)$, $\widetilde{f}(x)$, $f^{(p)}(x)$ $(p = 1, 2, \ldots, r)$ и $\widetilde{f}^{(q)}(x)$ $(q = 1, 2, \ldots, r)$. Нам потребуется одна лемма[12].

[12] Эта лемма была уже доказана в работе Н.К. Бари [2]; здесь доказательство несколько короче.

Лемма 5. *Пусть $\varphi \in \Phi$ и удовлетворяет условию (B), пусть $r \geqslant 0$ — целое число; если $u_n \downarrow 0$ и*

$$n^r u_n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} u_\nu \sim \varphi\left(\frac{1}{n}\right), \tag{4.1}$$

то

$$u_n \sim \frac{1}{n^r}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Доказательство. Из (4.1) следует

$$A_1\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) < n^r u_n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} u_\nu < A_2\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4.2}$$

Поэтому, в частности,

$$n^r u_n < A_2\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right), \tag{4.3}$$

т.е.

$$u_n < A_2 \frac{1}{n^r}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4.4}$$

Далее, имеем для любого m в силу (4.2)

$$\sum_{\nu=m+1}^{\infty} \nu^{r-1} u_\nu < A_2\,\varphi\left(\frac{1}{m}\right), \tag{4.5}$$

$$n^r u_n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} u_\nu > A_1 \varphi\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4.6}$$

Выбирая $m > n$ и вычитая (4.5) из (4.6), находим

$$n^r u_n + \sum_{\nu=n+1}^{m} \nu^{r-1} u_\nu > A_1\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - A_2\,\varphi\left(\frac{1}{m}\right).$$

В силу $u_n \downarrow 0$ отсюда тем более следует

$$n^r u_n + u_n \sum_{\nu=n+1}^{m} \nu^{r-1} > A_1\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - A_2\,\varphi\left(\frac{1}{m}\right),$$

а значит, и подавно

$$u_n(n^r + m^r) > A_1 \varphi\left(\frac{1}{n}\right) - A_2 \varphi\left(\frac{1}{m}\right) \qquad (r > 0),$$

$$u_n\left(1 + \lg\frac{m}{n}\right) > A_1 \varphi\left(\frac{1}{n}\right) - A_2 \varphi\left(\frac{1}{m}\right) \qquad (r = 0).$$

Положим $m = np$, где p — целое число, которое подберем позже. Тогда

$$u_n > \frac{A_1\varphi(1/n) - A_2\varphi\bigl(1/(np)\bigr)}{n^r(1 + p^r)} \qquad (r > 0),$$

$$u_n > \frac{A_1\varphi(1/n) - A_2\varphi\bigl(1/(np)\bigr)}{1 + \ln p} \qquad (r = 0),$$

что можно записать так:

$$u_n > \frac{A_1\varphi(1/n) - A_2\varphi(1/(np))}{A_p n^r} \qquad (r \geqslant 0). \tag{4.7}$$

Но $\varphi(\delta)$ удовлетворяет (B), а значит, и (P), т.е. для любого $\theta < 1$ можно подобрать целое p так, что

$$\varphi\left(\frac{1}{np}\right) < \theta\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2 \ldots). \tag{4.8}$$

Полагая $\theta = (1/2)(A_1/A_2)$, находим из (4.7) и (4.8)

$$u_n > \frac{1}{2}\frac{A_1}{A_p}\frac{1}{n^r}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right),$$

что в соединении с (4.4) дает $u_n \sim (1/n^r)\,\varphi(1/n)$, и лемма доказана.

Пользуясь этой леммой, докажем следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть $\varphi(\delta) \in \Phi$ и удовлетворяет условию (B), пусть $r \geqslant 0$ — целое число; тогда все соотношения*

$$E_n(f^{(p)}) \sim \frac{1}{n^{r-p}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (0 \leqslant p \leqslant r), \tag{4.9}$$

$$E_n(\widetilde{f}^{(q)}) \sim \frac{1}{n^{r-q}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (0 \leqslant q \leqslant r) \tag{4.10}$$

эквивалентны.

Доказательство. Пусть для некоторого p $(0 \leqslant p \leqslant r)$ имеем

$$E_n(f^{(p)}) \sim \frac{1}{n^{r-p}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4.11}$$

Отсюда, в частности,

$$E_n(f^{(p)}) = O\left[\frac{1}{n^{r-p}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

а потому по теореме 1 § 3

$$E_n(f^{(p)}) = O\left[\frac{1}{n^{r-p}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \qquad (p = 0, 1, \ldots, r), \tag{4.12}$$

$$E_n(\widetilde{f}^{(q)}) = O\left[\frac{1}{n^{r-q}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \qquad (q = 0, 1, \ldots, r). \tag{4.13}$$

Остается произвести оценки снизу.

По теореме (B) § 1 имеем для $n = 1, 2, \ldots$

$$E_n(f^{(p)}) = O\left[n^p E_n(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{p-1}E_\nu(f)\right] \qquad (p = 1, 2, \ldots, r),$$

а так как из (4.11) следует

$$E_n(f^{(p)}) > A_1\frac{1}{n^{r-p}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right),$$

то

$$n^p E_n(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{p-1}E_\nu(f) > A_2\frac{1}{n^{r-p}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (p = 1, 2, \ldots, r). \tag{4.14}$$

С другой стороны, из (4.12), полагая $p = 0$, получаем

$$E_n(f) = O\left[\frac{1}{n^r}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{4.15}$$

Раз $\varphi(\delta)$ удовлетворяет условию (B), то и $\delta^\alpha\varphi(\delta)$ удовлетворяет этому условию при любом $\alpha \geqslant 0$ (см. замечание 1 в § 2). Поэтому в силу $r - p \geqslant 0$ имеем из (4.15)

$$n^p E_n(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{p-1} E_\nu(f) =$$

$$= O\left[n^{p-r}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{p-r-1}\,\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)\right] = O\left[\frac{1}{n^{r-p}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{4.16}$$

Отсюда и из (4.14)

$$n^p E_n(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{p-1} E_\nu(f) \sim \frac{1}{n^{r-p}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Но на основании леммы 5, которую мы вправе применять, так как $\delta^{r-p}\varphi(\delta)$ удовлетворяет условию (B), имеем

$$E_n(f) \sim \frac{1}{n^p}\frac{1}{n^{r-p}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^r}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4.17}$$

Аналогично, на основании (1.7) имеем

$$E_n(f^{(p)}) = O\left[n^p E_n(\widetilde{f}) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{p-1} E_\nu(\widetilde{f})\right] \qquad (p = 0, 1, \ldots, r);$$

поэтому, рассуждая таким же образом, находим

$$E_n(\widetilde{f}) \sim \frac{1}{n^r}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Из (4.17), в частности, имеем

$$E_n(f) > A_3\frac{1}{n^r}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right), \tag{4.17*}$$

а потому по теореме (A) § 1

$$E_n(f^{(p)}) > A_p\frac{n^p}{n^r}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{A_p}{n^{r-p}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (p = 1, 2, \ldots, r), \tag{4.18}$$

а также

$$E_n(\widetilde{f}^{(q)}) > A_q\frac{n^q}{n^r}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{A_q}{n^{r-q}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (q = 1, 2, \ldots, r). \tag{4.19}$$

Соединяя (4.12), (4.17) и (4.18), а также (4.13), (4.17*) и (4.19), находим окончательно

$$E_n(f^{(p)}) \sim \frac{1}{n^{r-p}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (p = 0, 1, \ldots, r),$$

$$E_n(\widetilde{f}^{(q)}) \sim \frac{1}{n^{r-q}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (q = 0, 1, \ldots, r).$$

В силу равноправия f и $\widetilde{f}$ тот же результат получился бы, если бы мы отправлялись от соотношения

$$E_n(\widetilde{f}^{(q)}) \sim \frac{1}{n^{r-q}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Теорема полностью доказана.

Вопрос о необходимости условия (B) в теореме 4 мы разрешили не с той полнотой, как в теореме 1 § 3. Именно, мы не умеем пока строить функцию $f(x)$, для которой справедливы все соотношения (4.9) и (4.10), кроме одного (при $p=r$ или $q=r$), а это последнее заведомо нарушается, если (B) не выполнено. Все же мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 5. *Условие (B) является необходимым для того, чтобы все соотношения* (4.9) *и* (4.10) *были эквивалентны. Точнее, если оно не выполнено, то существует:*

а) *функция $f_1(x)$, для которой*

$$E_n(f_1) \sim \frac{1}{n^r}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{\it но} \quad E_n(f_1^{(r)}) \not\sim \varphi\left(\frac{1}{n}\right);$$

б) *функция $f_2(x)$, для которой*

$$E_n(f_2) \sim \frac{1}{n^r}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{\it но} \quad E_n(\widetilde{f}_2^{(r)}) \not\sim \varphi\left(\frac{1}{n}\right);$$

в) *функция $f_3(x)$, для которой*

$$E_n(f_3) \sim \varphi\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{\it но} \quad E_n(\widetilde{f}_3) \not\sim \varphi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Доказательство[13]. Мы будем пользоваться теоремой 2 § 3, а также следующей теоремой С.Н. Бернштейна [4] (см. также [6; 9, стр. 145]): для любой последовательности $g_n \downarrow 0$ найдется непрерывная периодическая функция $\psi(x)$, для которой

$$E_n(\psi) = g_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Случай а). По теореме С.Н. Бернштейна существует функция $\psi_1(x)$, для которой

$$E_n(\psi_1) = \frac{1}{n^r}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.20}$$

Если

$$E_n(\psi_1^{(r)}) \neq O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

то пример построен. Пусть этого нет, т.е.

$$E_n(\psi_1^{(r)}) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{4.21}$$

Тогда построим функцию $\chi_1(x)$, для которой

$$E_n(\chi_1) = O\left[\frac{1}{n^r}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right], \tag{4.22}$$

[13] Метод, которым мы пользуемся, был уже использован С.М. Лозинским (см. конец введения к настоящей статье).

но

$$E_n(\chi_1^{(r)}) \neq O\biggl[\varphi\biggl(\frac{1}{n}\biggr)\biggr]. \tag{4.23}$$

Такая функция существует по теореме 2 § 3 (положить $\chi_1 = \widetilde{f}$ в утверждении этой теоремы).

Пусть теперь

$$f_1(x) = \psi_1(x) + A\chi_1(x),$$

где $A > 0$ подберем позже. Имеем в силу (4.22)

$$E_n(\chi_1) < A_1 \frac{1}{n^r}\,\varphi\biggl(\frac{1}{n}\biggr), \tag{4.24}$$

а потому из (4.20) и (4.24) получаем

$$E_n(f_1) \leqslant E_n(\psi_1) + AE_n(\chi_1) < \frac{1}{n^r}\,\varphi\biggl(\frac{1}{n}\biggr) + AA_1\frac{1}{n^r}\,\varphi\biggl(\frac{1}{n}\biggr) = O\biggl[\frac{1}{n^r}\,\varphi\biggl(\frac{1}{n}\biggr)\biggr]. \tag{4.25}$$

С другой стороны,

$$E_n(f_1) \geqslant E_n(\psi_1) - AE_n(\chi_1) > \frac{1}{n^r}\,\varphi\biggl(\frac{1}{n}\biggr) - AA_1\frac{1}{n^r}\,\varphi\biggl(\frac{1}{n}\biggr) = \\ = (1 - AA_1)\frac{1}{n^r}\,\varphi\biggl(\frac{1}{n}\biggr). \tag{4.26}$$

Таким образом, если выбрать A так, чтобы $0 < A < 1/A_1$, то из (4.25) и (4.26) получаем

$$E_n(f_1) \sim \frac{1}{n^r}\,\varphi\biggl(\frac{1}{n}\biggr).$$

Но в силу (4.21) и (4.23)

$$E_n(f_1^{(r)}) \geqslant AE_n(\chi_1^{(r)}) - E_n(\psi_1^{(r)}) \neq O\biggl[\varphi\biggl(\frac{1}{n}\biggr)\biggr],$$

и пример построен.

С л у ч а й б). Рассуждаем в точности так же, как и выше. Выбираем $\psi_2(x)$ так, чтобы

$$E_n(\psi_2) = \frac{1}{n^r}\,\varphi\biggl(\frac{1}{n}\biggr) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Если

$$E_n(\widetilde{\psi}_2^{(r)}) \neq O\biggl[\frac{1}{n^r}\,\varphi\biggl(\frac{1}{n}\biggr)\biggr],$$

то пример готов. Если этого нет, то подправляем $\psi_2(x)$, т.е. берем

$$f_2(x) = \psi_2(x) + A\chi_2(x),$$

где $\chi_2(x)$ выбрана на основании теоремы 2 так, чтобы

$$E_n(\chi_2) = O\biggl[\frac{1}{n^r}\,\varphi\biggl(\frac{1}{n}\biggr)\biggr], \quad \text{а} \quad E_n(\widetilde{\chi}_2^{(r)}) \neq O\biggl[\varphi\biggl(\frac{1}{n}\biggr)\biggr],$$

и A подобрано должным образом. Остальные рассуждения остаются прежними.

С л у ч а й в). Конструкция примера аналогична предыдущим. Выбираем $\psi_3(x)$ из условий

$$E_n(\psi_3)=\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\qquad(n=1,2,\ldots),$$

и если

$$E_n(\widetilde{\psi}_3)=O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

то полагаем

$$f_3(x)=\psi_3(x)+A\chi_3(x),$$

где A разумно подобрано, а $\chi_3(x)$ удовлетворяет условиям

$$E_n(\chi_3)=O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right],\quad \text{и}\quad E_n(\widetilde{\chi}_3)\neq O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Теорема доказана.

Переходим к изучению условий эквивалентности $\sim$-соотношений для наилучших приближений и модулей непрерывности.

Прежде всего нам понадобится вспомогательная лемма[14)].

Лемма 6. *Пусть $\varphi(\delta)\in\Phi$ и удовлетворяет условию (B_k). Пусть $u_n\downarrow 0$. Тогда из соотношения*

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}u_{\nu-1}\sim n^k\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\tag{4.27}$$

следует

$$u_n\sim\varphi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (4.27) следует

$$A_1n^k\varphi\left(\frac{1}{n}\right)<\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}u_{\nu-1}<A_2n^k\varphi\left(\frac{1}{n}\right).\tag{4.28}$$

Отсюда, в частности, в силу $u_n\downarrow$

$$u_n\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}<A_2n^k\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\tag{4.29}$$

и, значит, в силу $\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\sim n^k$ получаем

$$u_n=O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right].\tag{4.30}$$

Пусть теперь m — любое целое, $m>n$. Имеем из (4.28)

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}u_{\nu-1}>A_1m^k\varphi\left(\frac{1}{m}\right),\tag{4.31}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}u_{\nu-1}<A_2n^k\varphi\left(\frac{1}{n}\right),\tag{4.32}$$

[14)] Для случая $\varphi(\delta)=\delta^\alpha$ эта лемма доказана в работе С.Б. Стечкина [13], а в общем случае — в работе Н.К. Бари [2].

откуда, вычитая (4.32) из (4.31), получаем

$$\sum_{\nu=n+1}^{m} \nu^{k-1} u_{\nu-1} > A_1 m^k \varphi\left(\frac{1}{m}\right) - A_2 n^k \varphi\left(\frac{1}{n}\right).$$

В силу $u_n \downarrow$ отсюда и подавно

$$u_n \sum_{\nu=n+1}^{m} \nu^{k-1} > A_1 m^k \varphi\left(\frac{1}{m}\right) - A_2 n^k \varphi\left(\frac{1}{n}\right),$$

а значит, и

$$m^k u_n > A_1 m^k \varphi\left(\frac{1}{m}\right) - A_2 n^k \varphi\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4.33}$$

Положим $m = np$; тогда из (4.33)

$$u_n > A_1 \varphi\left(\frac{1}{np}\right) - A_2 \frac{1}{p^k} \varphi\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4.34}$$

Здесь число p в нашем распоряжении; выберем его так, чтобы

$$p^k \varphi\left(\frac{1}{np}\right) > 2 \frac{A_2}{A_1} \varphi\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4.35}$$

Это возможно, так как $\varphi(\delta)$ удовлетворяет условию (B_k), а тогда, как показано в § 2, верно и (P_k), т.е. можно для любого $\theta < 1$ выбрать целое p так, чтобы

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right) < \theta p^k \varphi\left(\frac{1}{np}\right),$$

и надо искать p, положив $\theta = A_1/(2A_2)$.

Из (4.34) и (4.35) получаем

$$u_n > A_2 \frac{1}{p^k} \varphi\left(\frac{1}{n}\right),$$

что в соединении с (4.30) дает $u_n \sim \varphi(1/n)$, и лемма доказана.

Опираясь на эту лемму, мы можем доказать следующее предложение.

Лемма 7. *Пусть $\varphi(\delta) \in \Phi$ и удовлетворяет условию (B_k). Тогда соотношения*

$$E_n(f) \sim \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.36}$$

и

$$\omega_k(\delta, f) \sim \varphi(\delta) \tag{4.37}$$

эквивалентны[15].

Доказательство. Из (4.37) следует

$$\omega_k(\delta, f) = O[\varphi(\delta)]. \tag{4.38}$$

[15] Эта лемма (в форме условия (S_k)) содержится в основной теореме работы С.Б. Стечкина [12]. Она составляет также "положительную" часть теоремы 3 С.М. Лозинского [8] (в форме условия (L_k)). Доказательство ее дано в теореме 6 работы Н.К. Бари [2]; условия теоремы сформулированы в терминах (L_k). В той же работе дан аналог этой теоремы для случая отрезка $[a, b]$ длины, меньшей чем 2π.

На основании обобщенной теоремы Джексона тогда

$$E_n(f) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{4.39}$$

Так как $\varphi(\delta)$ удовлетворяет условию (B_k), то из (4.39), как при доказательстве леммы 4, следует

$$\frac{1}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}E_{\nu-1}(f) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{4.40}$$

Но на основании теоремы (D) § 1 имеем

$$\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqslant \frac{A_k}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}E_{\nu-1}(f), \tag{4.41}$$

а так как в силу (4.37)

$$\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right) > A\varphi\left(\frac{1}{n}\right), \tag{4.42}$$

то, соединяя (4.40), (4.41) и (4.42), находим

$$\frac{1}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}E_{\nu-1}(f) \sim \varphi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Применяя теперь лемму 6, сразу находим

$$E_n(f) \sim \varphi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Допустим теперь, напротив, что (4.36) выполнено. Тогда, в частности, $E_n(f) = O[\varphi(1/n)]$, и на основании леммы 4 § 3 отсюда следует

$$\omega_k(\delta, f) = O[\varphi(\delta)], \tag{4.43}$$

потому что $\varphi(\delta)$ удовлетворяет условию (B_k).

С другой стороны, так как из (4.36) следует

$$E_n(f) \geqslant A_1\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$$

и по обобщенной теореме Джексона

$$\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right) \geqslant A_k E_n(f),$$

то отсюда

$$\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right) \geqslant A_k A_1\varphi\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4.44}$$

Соединяя (4.43) и (4.44), находим

$$\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right) \sim \varphi\left(\frac{1}{n}\right),$$

и в силу свойства 6 модулей непрерывности

$$\omega_k(\delta, f) \sim \varphi(\delta).$$

Лемма доказана.

Мы имеем теперь возможность доказать следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть r — целое неотрицательное число, $\varphi(\delta) \in \Phi$ и удовлетворяет условиям (B) и (B_k). Тогда все соотношения*

$$E_n(f^{(p)}) \sim \frac{1}{n^{r-p}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (p = 0, 1, \ldots, r), \tag{4.45}$$

$$E_n(\widetilde{f}^{(q)}) \sim \frac{1}{n^{r-q}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (q = 0, 1, \ldots, r), \tag{4.46}$$

$$\omega_{k+r-s}(\delta, f^{(s)}) \sim \delta^{r-s}\varphi(\delta) \qquad (s = 0, 1, \ldots, r), \tag{4.47}$$

$$\omega_{k+r-m}(\delta, \widetilde{f}^{(m)}) \sim \delta^{r-m}\varphi(\delta) \qquad (m = 0, 1, \ldots, r) \tag{4.48}$$

эквивалентны[16]*.*

Доказательство. Эквивалентность всех соотношений (4.45) и (4.46) имеет место даже при выполнении только условия (B), как было показано в теореме 4. Обозначая $\psi = f^{(p)}$ или $\psi = \widetilde{f}^{(p)}$, мы можем утверждать на основании леммы 7, что соотношения

$$E_n(\psi) \sim \frac{1}{n^{r-p}}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{и} \quad \omega_{k+r-p}(\delta, \psi) \sim \delta^{r-p}\varphi(\delta)$$

эквивалентны, если убедимся, что функция

$$F_{r-p}(\delta) = \delta^{r-p}\varphi(\delta)$$

удовлетворяет условию (B_{k+r-p}). Но так как $r - p = l \geqslant 0$, то это действительно имеет место (см. замечание 3 в § 2).

Таким образом, каждое из условий (4.45) эквивалентно соответствующему условию (4.47) и аналогично для (4.46) и (4.48). Значит, все соотношения (4.45), (4.46), (4.47) и (4.48) эквивалентны, и теорема доказана.

В частности, для случая $\varphi(\delta) = \delta^\alpha$ $(0 < \alpha < k)$ из доказанной теоремы вытекает эквивалентность всех соотношений

$$E_n(f^{(p)}) \sim \frac{1}{n^{r-p+\alpha}} \qquad (0 \leqslant p \leqslant r),$$
$$E_n(\widetilde{f}^{(q)}) \sim \frac{1}{n^{r-q+\alpha}} \qquad (0 \leqslant q \leqslant r),$$

$$\omega_{k+r-s}(\delta, f^{(s)}) \sim \delta^{r-s+\alpha} \qquad (0 \leqslant s \leqslant r),$$
$$\omega_{k+r-m}(\delta, \widetilde{f}^{(m)}) \sim \delta^{r-m+\alpha} \qquad (0 \leqslant m \leqslant r).$$

В теореме 4 С.М. Лозинского установлено, что для эквивалентности соотношений

$$E_n(f) \sim \frac{1}{n^r}\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{и} \quad \omega_k(\delta, f^{(r)}) \sim \varphi(\delta)$$

необходимо и достаточно выполнения условия $(\mathfrak{L}_k)$ (т.е. (L) и (L_k)). Отсюда непосредственно вытекает необходимость этих условий для эквивалентности всех соотношений (4.45), (4.46), (4.47) и (4.48). Полагая в формулах (4.47) и (4.48)

[16] Отметим, что эквивалентность соотношений (4.45) и (4.47) вытекает из теорем 2 и 4 работы С.М. Лозинского [8].

$r = s = m = 0$, мы, в частности, получаем, что условия (B) и (B_k) достаточны для эквивалентности соотношений

$$\omega_k(\delta, f) \sim \varphi(\delta) \quad \text{и} \quad \omega_k(\delta, \widetilde{f}) \sim \varphi(\delta).$$

Для случая $k = 1$ в § 5 будет показано, что для эквивалентности соотношений

$$\omega(\delta, f) \sim \varphi(\delta) \quad \text{и} \quad \omega(\delta, \widetilde{f}) \sim \varphi(\delta)$$

необходимо (и достаточно) выполнение условий (B) и (B_1).

Необходимость выполнения условий (B) и (B_k) для случая $k > 1$ нам установить не удалось.

§ 5. О теореме Привалова

Мы ставим задачу: найти необходимые и достаточные условия для справедливости "обобщенной теоремы Привалова", т.е. эквивалентности соотношений

$$\omega(\delta, f) = O[\varphi(\delta)] \quad \text{и} \quad \omega(\delta, \widetilde{f}) = O[\varphi(\delta)]. \tag{5.1}$$

Как уже упоминалось во введении, И.И. Привалов [11] рассмотрел случай $\varphi(\delta) = \delta^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$. Из теоремы Н.К. Бари (см. [1], теорема 8 при $k = 1$) следует, что соотношения (5.1) эквивалентны, если $\varphi \in \Phi$ и удовлетворяет условиям (B) и (B_1). Отметим, что этот результат (в форме условий (Z) и (Z_1)) можно было бы также вывести из неравенства Зигмунда (1.21). Здесь мы путем построения надлежащего примера покажем, что условия (B) и (B_1) являются необходимыми для справедливости обобщенной теоремы Привалова, если $\varphi(\delta)/\delta$ почти убывает. В общем случае эти условия приходится заменить несколько иными.

Лемма 8. *Пусть $\omega(\delta)$ $(0 \leqslant \delta \leqslant \pi)$ есть модуль непрерывности, для которого*

$$\int_0^\pi \frac{\omega(t)}{t}\, dt < \infty. \tag{5.2}$$

Тогда существует непрерывная периодическая функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям

$$\omega(\delta, f) \sim \omega(\delta), \tag{5.3}$$

$$\omega(\delta, \widetilde{f}) \geqslant \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t}\, dt + \delta \int_\delta^\pi \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt\right\} + O[\omega(\delta)]. \tag{5.4}$$

Доказательство. Положим

$$f(x) = \omega(x) \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right), \qquad f(x) = \omega(\pi - x) \quad \left(\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi\right),$$

$$f(x) = 0 \quad (-\pi \leqslant x \leqslant 0), \qquad f(x + 2\pi) = f(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Известно (см. [10]), что если $\psi(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$ есть модуль непрерывности некоторой функции (не обязательно периодической), то

$$\omega(\delta, \psi) = \psi(\delta) \qquad (0 \leqslant \delta \leqslant a).$$

Поэтому

$$\omega(\delta, f) = \omega(\delta) \qquad \left(0 \leqslant \delta \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\omega(\delta, f) = \omega\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad \left(\frac{\pi}{2} \leqslant \delta \leqslant \pi\right),$$

откуда и вытекает, что

$$\omega(\delta, f) \sim \omega(\delta) \qquad (0 \leqslant \delta \leqslant \pi). \tag{5.5}$$

Переходим к оценке $\omega(\delta, \widetilde{f})$. Известно, что при выполнении условия

$$\int_0^\pi \frac{\omega(t, f)}{t}\, dt < \infty \tag{5.6}$$

функция $\widetilde{f}(x)$ непрерывна и в каждой точке

$$\widetilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{dt}{2 \operatorname{tg}(t/2)},$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. В силу (5.2) и (5.5) условие (5.6) выполняется для рассматриваемой нами функции $f(x)$. Поэтому

$$\widetilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{dt}{2 \operatorname{tg}(t/2)} =$$
$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{dt}{t} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2 \operatorname{tg}(t/2)}\right] dt.$$

Оценим

$$\widetilde{f}(-h) - \widetilde{f}(0) =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - f(t-h)] \frac{dt}{t} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t-h) - f(t)] \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2 \operatorname{tg}(t/2)}\right] dt, \tag{5.7}$$

где $0 < h \leqslant \pi/2$. Так как функция

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{2 \operatorname{tg}(t/2)}$$

суммируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, то

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t-h) - f(t)] \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2 \operatorname{tg}(t/2)}\right] dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\omega(h)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{t} - \frac{1}{2 \operatorname{tg}(t/2)} \right| dt = O[\omega(h)]. \tag{5.8}$$

Далее, в силу определения функции $f(x)$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - f(t-h)] \frac{dt}{t} = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^\pi f(t) \frac{dt}{t} - \int_h^\pi f(t-h) \frac{dt}{t} - \int_{-\pi}^{-\pi+h} f(t-h) \frac{dt}{t} \right\} =$$
$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/2} \omega(t) \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t+h}\right] dt + \int_{\pi/2}^{\pi-h} \omega(\pi - t) \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t+h}\right] dt + \right.$$
$$\left. + \int_{\pi-h}^{\pi} \omega(\pi - t) \left[\frac{1}{t} + \frac{1}{2\pi - t - h}\right] dt \right\}.$$

Предпоследний из этих интегралов есть $O[\omega(\pi) \cdot h]$, что по свойству 7 модулей непрерывности равно $O[\omega(h)]$; последний интеграл также есть $O[\omega(h)]$. Таким образом,

$$\widetilde{f}(-h) - \widetilde{f}(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \omega(t) \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t+h}\right] dt + O[\omega(h)]. \tag{5.9}$$

Далее,

$$\int_0^{\pi/2}\omega(t)\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t+h}\right]dt=\int_0^h\frac{\omega(t)}{t}\,dt-\int_0^h\frac{\omega(t)}{t+h}\,dt+h\int_h^{\pi/2}\frac{\omega(t)}{t(t+h)}\,dt. \tag{5.10}$$

Но

$$\int_0^h\frac{\omega(t)}{t+h}\,dt=O[\omega(h)], \tag{5.11}$$

$$\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t(t+h)}=\frac{h}{t^2(t+h)}\leqslant\frac{h}{t^3},$$

откуда

$$\int_h^{\pi/2}\frac{\omega(t)}{t(t+h)}\,dt=\int_h^{\pi/2}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt+O\left[h\int_h^{\pi/2}\frac{\omega(t)}{t^3}\,dt\right]. \tag{5.12}$$

Но по свойству 4 модулей непрерывности, если $t\geqslant h$, имеем

$$\frac{\omega(t)}{t}\leqslant A\frac{\omega(h)}{h},$$

где A — абсолютная константа. Поэтому

$$\int_h^{\pi/2}\frac{\omega(t)}{t^3}\,dt=O\left[\frac{\omega(h)}{h}\int_h^{\pi/2}\frac{dt}{t^2}\right]=O\left[\frac{\omega(h)}{h^2}\right]. \tag{5.13}$$

Сопоставляя оценки (5.10)–(5.13), получаем

$$\int_0^{\pi/2}\omega(t)\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t+h}\right]dt=\int_0^h\frac{\omega(t)}{t}\,dt+h\int_h^{\pi/2}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt+O[\omega(h)].$$

Отсюда и из (5.9) получаем

$$\widetilde{f}(-h)-\widetilde{f}(0)=\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^h\frac{\omega(t)}{t}\,dt+h\int_h^{\pi/2}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt\right\}+O[\omega(h)].$$

Так как, кроме того,

$$h\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt=O[h\omega(\pi)]=O[\omega(h)],$$

то

$$\widetilde{f}(-h)-\widetilde{f}(0)=\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^h\frac{\omega(t)}{t}\,dt+h\int_h^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt\right\}+O[\omega(h)].$$

Но

$$\omega(\delta,\widetilde{f})\geqslant|\widetilde{f}(-\delta)-\widetilde{f}(0)|,$$

а потому

$$\omega(\delta,\widetilde{f})\geqslant\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^\delta\frac{\omega(t)}{t}\,dt+\delta\int_\delta^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt\right\}+O[\omega(\delta)],$$

и лемма доказана.

Теорема 7. *Пусть $\varphi(\delta)\in\Phi$ и, кроме того, $\varphi(\delta)/\delta\downarrow$. Для того чтобы соотношения*

$$\omega(\delta,f)=O[\varphi(\delta)]\quad и\quad\omega(\delta,\widetilde{f})=O[\varphi(\delta)]$$

были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(\delta)$ удовлетворяла условиям (B) и (B_1)[17].

Доказательство. Как уже упоминалось во введении к этому параграфу, достаточность условий теоремы известна. Для доказательства их необходимости замечаем (см. свойство 5 модулей непрерывности), что если $\varphi(\delta) \in \Phi$ и $\varphi(\delta)/\delta \downarrow$, то $\varphi(\delta)$ есть модуль непрерывности. Далее, рассмотрим два случая:

$$\int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t}\,dt = \infty \quad \text{и} \quad \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t}\,dt < \infty.$$

В первом случае, как показал А. Зигмунд [22], существует непрерывная периодическая функция $f(x)$, для которой $\omega(\delta, f) = \varphi(\delta)$, а $\widetilde{f}(x)$ неограничена и, следовательно, условие $\omega(\delta, \widetilde{f}) = O[\varphi(\delta)]$ не выполняется.

Во втором случае по только что доказанной лемме существует функция $f(x)$, для которой

$$\omega(\delta, f) \sim \varphi(\delta),$$

$$\omega(\delta, \widetilde{f}) \geqslant \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t}\,dt + \delta\int_\delta^\pi \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\right\} + O[\varphi(\delta)]. \tag{5.14}$$

Но если не выполняется хотя бы одно из условий (B) и (B_1), то в силу эквивалентности (B) и (Z), а также (B_1) и (Z_1) не выполняется хотя бы одно из условий (Z) и (Z_1), откуда

$$\int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t}\,dt + \delta\int_\delta^\pi \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt \neq O[\varphi(\delta)]$$

и, значит, в силу (5.14)

$$\omega(\delta, \widetilde{f}) \neq O[\varphi(\delta)].$$

Теорема доказана.

Пусть теперь $\varphi(\delta)$ — произвольная функция класса Φ. Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi_1(\delta) = \delta \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \frac{\varphi(\eta)}{\eta}. \tag{5.15}$$

В силу свойства 6 модулей непрерывности соотношения

$$\omega(\delta, f) = O[\varphi(\delta)] \quad \text{и} \quad \omega(\delta, \widetilde{f}) = O[\varphi(\delta)] \tag{5.16}$$

равносильны соотношениям

$$\omega(\delta, f) = O[\varphi_1(\delta)] \quad \text{и} \quad \omega(\delta, \widetilde{f}) = O[\varphi_1(\delta)]. \tag{5.17}$$

Кроме того, из (5.15) следует $\varphi_1(\delta)/\delta \downarrow$. Поэтому в качестве мажорант для модулей непрерывности естественно рассматривать лишь такие функции $\varphi(\delta)$, которые удовлетворяют условию $\varphi(\delta)/\delta \downarrow$.

Если все же отказаться от этого ограничения, то необходимые и достаточные условия для справедливости обобщенной теоремы Привалова будут иметь такой вид.

Теорема 8. *Пусть $\varphi(\delta) \in \Phi$. Для того чтобы соотношения*

$$\omega(\delta, f) = O[\varphi(\delta)] \quad \text{и} \quad \omega(\delta, \widetilde{f}) = O[\varphi(\delta)] \tag{5.16}$$

[17] Ниже будет показано, что эта теорема остается справедливой, если $\varphi(\delta) \in \Phi$ и $\varphi(\delta)/\delta$ почти убывает (см. с. 37).

были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi_1(\delta)$, *определяемая равенством* (5.15), *либо была тождественным нулем, либо удовлетворяла условиям* (B) *и* (B_1).

Доказательство. Если $\varphi_1(\delta) \equiv 0$, то в силу (5.17) соотношения (5.16) означают, что

$$\omega(\delta, f) \equiv 0 \quad \text{и} \quad \omega(\delta, \widetilde{f}\,) \equiv 0,$$

и, очевидно, они эквивалентны. Если же $\varphi_1(\delta) \not\equiv 0$, то легко видеть[18], что $\varphi_1(\delta) \in \Phi$, и остается применить теорему 7 с заменой $\varphi(\delta)$ на $\varphi_1(\delta)$; таким образом, доказательство закончено.

В случае, когда $\varphi(\delta)/\delta$ почти убывает, т.е.

$$\frac{\varphi(\eta)}{\eta} \geqslant \frac{1}{A}\frac{\varphi(\delta)}{\delta} \quad \text{при} \quad 0 < \eta \leqslant \delta,$$

имеем

$$\varphi_1(\delta) \sim \varphi(\delta). \tag{5.18}$$

В самом деле, с одной стороны, очевидно,

$$\varphi_1(\delta) \leqslant \varphi(\delta),$$

с другой стороны,

$$\varphi_1(\delta) = \delta \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \frac{\varphi(\eta)}{\eta} \geqslant \frac{1}{A}\,\varphi(\delta).$$

Следовательно, в случае, когда $\varphi(\delta)/\delta$ почти убывает, условия (B) и (B_1) для функции $\varphi_1(\delta)$ равносильны тем же условиям, наложенным на функцию $\varphi(\delta)$. Этим доказана справедливость замечания, сделанного в сноске на предыдущей странице.

Переходим к вопросу об условиях эквивалентности порядковых соотношений для $\omega(\delta, f)$ и $\omega(\delta, \widetilde{f}\,)$.

Теорема 9. *Пусть* $\varphi(\delta) \in \Phi$ *и, кроме того, функция* $\varphi(\delta)/\delta$ *почти убывает. Для того чтобы соотношения*

$$\omega(\delta, f) \sim \varphi(\delta) \quad \text{и} \quad \omega(\delta, \widetilde{f}\,) \sim \varphi(\delta) \tag{5.19}$$

были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(\delta)$ *удовлетворяла условиям* (B) *и* (B_1).

Доказательство. Построим для функции $\varphi(\delta)$ функцию $\varphi_1(\delta)$. Тогда $\varphi_1(\delta)/\delta$ убывает и согласно (5.18) $\varphi_1(\delta) \sim \varphi(\delta)$. Поэтому соотношения (5.19) равносильны соотношениям

$$\omega(\delta, f) \sim \varphi_1(\delta) \quad \text{и} \quad \omega(\delta, \widetilde{f}\,) \sim \varphi_1(\delta). \tag{5.20}$$

Повторяя дословно доказательство теоремы 7, получаем, что для эквивалентности соотношений (5.20) необходимо и достаточно, чтобы $\varphi_1(\delta)$ удовлетворяла условиям (B) и (B_1), или, что в силу (5.18) одно и то же, чтобы $\varphi(\delta)$ удовлетворяла этим условиям. Теорема доказана.

Заметим теперь, что требование почти убывания для $\varphi(\delta)/\delta$ не является дополнительным ограничением. В самом деле, если, например, $\omega(\delta, f) \sim \varphi(\delta)$, т.е.

$$A\varphi(\delta) \leqslant \omega(\delta, f) \leqslant B\varphi(\delta),$$

[18] См. [14, с. 234].

то в силу свойства 4 модулей непрерывности имеем при $0 < \eta \leqslant \delta \leqslant \pi$

$$\frac{\varphi(\delta)}{\delta} \leqslant \frac{1}{A}\frac{\omega(\delta,f)}{\delta} \leqslant \frac{A_1}{A}\frac{\omega(\eta,f)}{\eta} \leqslant \frac{A_1 B}{A}\frac{\varphi(\eta)}{\eta},$$

т.е. $\varphi(\delta)/\delta$ почти убывает.

В заключение отметим, что из полученных в этом параграфе теорем становится ясным, почему теорема Привалова справедлива при $\varphi(\delta) = \delta^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ и уже не верна при $\varphi(\delta) = \delta$; в последнем случае нарушается условие (B_1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бари Н.К.* О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1955. Т. 19. С. 285–302.
2. *Бари Н.К.* О локальном наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами // Учен. зап. МГУ. Сер. матем. 1956. № 8. С. 109–140.
3. *Бернштейн С.Н.* О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени // Сообщ. Харьк. матем. об-ва. Сер. 2. 1912. Т. 13. С. 49–194.
4. *Bernstein S.* Sur le probléme inverse de la théorie de la meilleure approximation des fonctions continues // Compt. Rend. Acad. Sc. 1938. V. 206. P. 1520–1523.
5. *Бернштейн С.Н.* Собрание сочинений. Т. I. Конструктивная теория функций (1905–1930). — М.: Изд. АН СССР, 1952.
6. *Бернштейн С.Н.* Собрание сочинений. Т. II. Конструктивная теория функций (1931–1953). — М.: Изд. АН СССР, 1954.
7. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. — М.—Л.: ОНТИ, 1939.
8. *Лозинский С.М.* Обращение теорем Джексона // Докл. АН СССР. 1952. Т. 83, № 5. С. 645–647.
9. *Натансон И.П.* Конструктивная теория функций. — М.—Л.: Гостехиздат, 1949.
10. *Никольский С.М.* Ряды Фурье функций с данным модулем непрерывности // Докл. АН СССР. 1946. Т. 52. С. 191–194.
11. *Privaloff J.* Sur les fonclions conjuguées // Bull. Soc. Math. de France. 1916. № 44. P. 100–103.
12. *Стечкин С.Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15. С. 219–242.
13. *Стечкин С.Б.* О наилучших приближениях периодических функций тригонометрическими полиномами // Докл. АН СССР. 1952. Т. 83, № 5. С. 651–654.
14. *Стечкин С.Б.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье (второе сообщение) // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1955. Т. 19. С. 221–246.
15. *Стечкин С.Б.* О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. Т. 20. С. 197–206.
16. *Тиман А.Ф., Тиман М.Ф.* Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем // Докл. АН СССР. 1950. Т. 71. С. 17–20.
17. *Jackson D.* Ober die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung. — Diss., Göttingen, 1911.
18. *Jackson D.* The theory of approximation // Amer. Math. Soc. Colloquium publication 1930. № 11.
19. *Marchaud A.* Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles // Journ. Mathém. pures et appl. 1927. V. 6, № 9. P. 337–425.
20. *Szegö G.* Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein // Schriften d. Königsberger Gelehrten Gesellschaft, Naturwiss. Klasse, H. 4 (1928), 59.
21. *de la Vallée Poussin Ch.J.* Leçons sur l'approximation des fonctions, d'une variable réelle. — Paris, 1919.

22. *Zygmund A.* O module ciągłości sumy szeregu sprzężonego z szeregiem Fouriera // Prace Mat.-fiz. 1924. № 33. P. 125–132.
23. *Zygmund A.* Smooth functions // Duke Math. Journ. 1945. № 12. P. 47–76.
24. *Favard J.* Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonométriques // Bull. Sci. Math. 1937. № 61. P. 209–224, 243–256.
25. *Тиман А.Ф.* Исследования по теории приближения функций: Автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. — Днепропетровск, 1951.