О ПРИБЛИЖЕНИИ АБСТРАКТНЫХ ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ*)

1. Постановка задачи. Пусть X есть некоторое вещественное пространство типа (B) и Q — компакт, содержащий более одной точки. Рассмотрим пространство $C(X)$, состоящее из всевозможных сильно непрерывных абстрактных функций $\varphi(q)$, заданных на компакте Q, со значениями в X, так что при любом $q_0 \in Q$ имеем $\varphi(q_0) \in X$ и $\|\varphi(q) - \varphi(q_0)\|_X \to 0$ при $q \to q_0$. Норму в пространстве $C(X)$ определим равенством

$$\|\varphi(q)\|_C = \max_{q \in Q} \|\varphi(q)\|_X.$$

В пространстве $C(X)$ можно, как обычно, поставить задачу Чебышева о наилучшем приближении заданной абстрактной функции $\varphi(q) \in C(X)$ посредством всевозможных полиномов по конечной системе линейно независимых абстрактных функций, $f_k(q) \in C(X)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$. Именно, пусть

$$p(q) = p_\alpha(q) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k\, f_k(q),$$

где α_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ — действительные числа, есть произвольный полином по системе $\{f_k(q)\}$ и

$$\mathcal{E}_N(\varphi) = \inf_\alpha \|\varphi(q) - p_\alpha(q)\|_C = \inf_\alpha \max_{q \in Q} \|\varphi(q) - p_\alpha(q)\|_X$$

наилучшее приближение абстрактной функции $\varphi(q)$ посредством полиномов $p(q)$. Требуется исследовать, существует ли н а и л у ч ш и й п о л и н о м $p^*(q)$, для которого

$$\mathcal{E}_N(\varphi) = \|\varphi(q) - p^*(q)\|_C,$$

а также изучить свойства этих наилучших полиномов (точки максимального уклонения, единственность, характеристические свойства и т.д.).

Аналогичную задачу можно поставить, когда X есть комплексное пространство типа (B). Частный случай, когда X есть конечномерное унитарное пространство или комплексное гильбертово пространство H, рассматривался ранее [1, 2].

2. Теорема существования. Как нетрудно проверить, пространство $C(X)$ есть пространство типа (B). Отсюда в силу общей теоремы о приближении элементов линейного нормированного пространства (см., например, [3, n° 8]) вытекает следующее предложение.

Теорема 1 (существования). *Для любой абстрактной функции $\varphi(q) \in C(X)$ существует по крайней мере один наилучший полином $p^*(q)$, для которого*

$$\|\varphi(q) - p^*(q)\|_C = \max_{q \in Q} \|\varphi(q) - p^*(q)\|_X = \mathcal{E}_N(\varphi).$$

3. Теорема о точках максимального уклонения. Пусть $\varphi(q) \in C(X)$. Будем говорить, что точка $q_0 \in Q$ является для полинома $p(q)$ *точкой макси-*

*) Докл. АН СССР. 1956. Т. 106, № 5. С. 773–776 (*совм. с С.И. Зуховицким*).

мального уклонения, если

$$\|\varphi(q_0)-p(q_0)\|_X=\max_{q\in Q}\|\varphi(q)-p(q)\|_X=\|\varphi(q)-p(q)\|_C.$$

Ясно, что всякий полином $p(q)$ имеет по крайней мере одну точку максимального уклонения.

Здесь мы исследуем вопрос о том, при каких ограничениях на систему $\{f_k(q)\}$ $(k=1,2,\ldots,N)$ она обладает тем свойством, что всякий наилучший полином имеет достаточно много точек максимального уклонения. Введем в рассмотрение два свойства систем $\{f_k(q)\}$:

(K_m) Для любой абстрактной функции $\varphi(q)\in C(X)$ и любого полинома $p^*(q)$, наименее уклоняющегося от $\varphi(q)$, число точек максимального уклонения не меньше заданного натурального числа m.

(P_m) Для любых m различных точек $q_i\in Q$ и любых m элементов $x_i\in X$ найдется по крайней мере один полином $p(q)$, удовлетворяющий условиям

$$p(q_i)=x_i \qquad (i=1,2,\ldots,m); \tag{1}$$

иными словами, интерполяционная задача (1) всегда разрешима.

Свойства (K_1) и (P_0) выполняются для любой системы $\{f_k(q)\}$.

Теорема 2 (о точках максимального уклонения). *Для того чтобы система $\{f_k(q)\}$ $(k=1,2,\ldots,N)$ обладала свойством (K_m), необходимо и достаточно, чтобы она обладала свойством (P_{m-1}).*

Таким образом, число точек максимального уклонения наилучших полиномов связано с интерполяционными свойствами системы $\{f_k(q)\}$.

Пусть s есть размерность пространства X, так что $1\leqslant s\leqslant\infty$. Из соображений размерности сразу следует, что если система $\{f_k(q)\}$ обладает свойством (P_m), то

$$m\leqslant\left[\frac{N}{s}\right].$$

Отсюда вытекает такое следствие.

Следствие 1. *Пусть X имеет размерность s. Тогда существует такая абстрактная функция $\varphi(q)\in C(X)$ и такой наилучший полином $p^*(q)$, что $p^*(q)$ имеет не более $[N/s]+1$ точек максимального уклонения.*

Если $N<s\leqslant\infty$, то, естественно, $[N/s]+1=1$.

В случае $s=1$ мы получаем интересное свойство с и с т е м Ч е б ы ш е в а (относительно этого понятия [3, 4]).

Следствие 2. *Для того чтобы система непрерывных действительных функций $\{f_k(q)\}$ $(k=1,2,\ldots,N)$ обладала свойством (K_{N+1}), необходимо и достаточно, чтобы она была системой Чебышева.*

В самом деле, для действительных функций свойство (P_N) эквивалентно тому, что система $\{f_k(q)\}$ есть система Чебышева.

4. Теорема единственности. Здесь мы исследуем вопрос о том, при каких условиях система приближающих функций $\{f_k(q)\}$ $(k=1,2,\ldots,N)$ обладает следующим с в о й с т в о м е д и н с т в е н н о с т и.

(U) Для любой абстрактной функции $\varphi(q)\in C(X)$ существует единственный наилучший полином $p^*(q)$ по системе $\{f_k(q)\}$.

Начнем с рассмотрения необходимых условий.

Теорема 3. *Пусть X имеет размерность s и n — натуральное число, для которого $(n-1)s<N\leqslant ns$. Для того чтобы система $\{f_k(q)\}$ $(k=1,2,\ldots,N)$*

обладала свойством (U), *необходимо, чтобы она удовлетворяла следующему условию*:

(T_{n-1}) *Всякий полином* $p(q) \not\equiv \theta$ *по системе* $\{f_k(q)\}$ *имеет на* Q *не более* $n-1$ *нулей*[1]*.*

Отметим, что в силу линейной независимости системы $\{f_k(q)\}$ из условий этой теоремы вытекает, что компакт Q содержит не менее n точек.

Приведем пример, показывающий, что условия этой теоремы еще не достаточны для того, чтобы система $\{f_k(q)\}$ обладала свойством (U). Пусть X есть двумерное евклидово пространство E_2 $(s=2)$; компакт Q состоит из двух точек; $N=3$, так что $n=2$. В качестве $\{f_k(q)\}$ возьмем систему

$$f_1(q)=\{1,0;\,0,0\},\qquad f_2(q)=\{0,1;\,0,0\},\qquad f_3(q)=\{0,0;\,1,0\}. \tag{2}$$

Здесь $f_1(q)$ есть функция, принимающая в точке q_1 значение $(1,0)$, а в точке q_2 — значение $(0,0)$, и аналогично для $f_2(q)$ и $f_3(q)$.

Нетрудно проверить, что эта система удовлетворяет условию (T_1). Тем не менее, для функции $\varphi(q)=\{0,0;\,0,1\}$ наилучший полином не единственен;

$$\mathcal{E}_3(\varphi)=\min_a \max_{q\in Q}\|\varphi(q)-p_\alpha(q)\|_{E_2}=1$$

и достигается для любого полинома

$$p_\alpha(q)=\alpha_1 f_1(q)+\alpha_2 f_2(q)+\alpha_3 f_3(q),$$

для которого $\alpha_3=0$ и $\alpha_1^2+\alpha_2^2\leqslant 1$.

Теорема 4. *Пусть* X *имеет размерность* s *и* n *— натуральное число, для которого* $(n-1)s<N\leqslant ns$. *Для того чтобы система* $\{f_k(q)\}$ $(k=1,2,\ldots,N)$ *обладала свойством* (U), *необходимо, чтобы она удовлетворяла условию* (P_{n-1}).

Доказательство этой теоремы довольно длинно. Отметим, что мы пользуемся следующими вспомогательными предложениями.

Лемма 1. *Условие* (T_{n-1}) *эквивалентно условию*

(Q_n) *Для любых* n *различных точек* $q_i\in Q$ *и любых* n *элементов* $x_i\in X$ *существует не более одного полинома* $p(q)$ *по системе* $\{f_k(q)\}$, *для которого*

$$p(q_j)=x_j \qquad (j=1,2,\ldots,n).$$

Лемма 2. *Пусть* X *имеет размерность* s *и* n *— натуральное число, для которого* $(n-1)s<N\leqslant ns$, *и система* $\{f_k(q)\}$ $(k=1,2,\ldots,N)$ *удовлетворяет условию* (T_{n-1}). *Тогда она удовлетворяет также условию*

(P^0_{n-1}) *Для любых* $n-1$ *различных точек* $q_i\in Q$ *найдется по крайней мере один полином* $p^{(0)}(q)\not\equiv\theta$, *для которого*

$$p^{(0)}(q_j)=x_j \qquad (j=1,2,\ldots,n-1).$$

Здесь случай $N=ns$ мало интересен, так как тогда условия (T_{n-1}) и (P_n) эквивалентны.

В общем случае совокупность условий (T_{n-1}) и (P_{n-1}) все еще не достаточна для того, чтобы система $\{f_k(q)\}$ обладала свойством (U). В этом нетрудно убедиться, взяв в качестве X пространство непрерывных функций $C[0,1]$. Тем не менее, эти два условия оказываются достаточными для одного важного класса пространств X.

Будем говорить, что пространство X *строго выпукло* [5], если равенство $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ имеет место в том и только в том случае, когда $\alpha x=\beta y$,

[1] Для $N=ns$ это понятие введено в [1].

где $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ [2]. Геометрически строгая выпуклость пространства означает, что его единичная сфера $\|x\| = 1$ не содержит ни одного отрезка. Пример (2) показывает, что условие (T_{n-1}) недостаточно для выполнения свойства (U) даже в случае строгой выпуклости пространства X.

Теорема 5 (единственности). *Пусть X — строго выпуклое пространство размерности s и n — натуральное число, для которого $(n-1)s < N \leqslant ns$. Для того чтобы система $\{f_k(q)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ обладала свойством (U), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условиям (T_{n-1}) и (P_{n-1}).*

При доказательстве этой теоремы мы пользуемся теоремой 2.

Заметим, что если $N \leqslant s$ или $N = ns$, то условие (P_{n-1}) вытекает из (T_{n-1}) и, следовательно, его можно отбросить. В случае $N = ns$ имеем такое более точное предложение.

Теорема 6. *Пусть X — строго выпуклое пространство размерности s и $N = ns$. Для того чтобы система $\{f_k(q)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ обладала свойством (U), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла любому из следующих (эквивалентных) условий: (T_{n-1}), (P_n), (K_{n+1}).*

Утверждение об эквивалентности свойств (U) и (K_{n+1}) дает в случае $N = ns$ новую характеристику систем единственности в терминах числа точек максимального уклонения.

5. Комплексный случай. В заключении заметим, что все результаты настоящей работы без изменения формулировок и доказательств переносятся на тот случай, когда X — комплексное банахово пространство. В частности, таким путем мы вновь получаем теоремы 1, 3 и 4 работы [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зуховицкий С.И., Крейн М.Г.* **название** // Успехи матем. наук. 1950. Т. 5, вып. 1(35). С. 217.
2. *Зуховицкий С.И., Стечкин С.Б.* О приближении абстрактных функций со значениями в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. 1955. Т. 106, № 3. С. 385–388.
3. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.—Л., 1947.
4. *Бернштейн С.Н.* Экстремальные свойства полиномов. — М.—Л., 1937.
5. *Clarkson J.A.* **название название название название** // Trans. Am. Math. Soc. 1936. V. 40. P. 396.
6. *Крейн М.Г.* **название название**// *Ахиезер Н., Крейн М.* О некоторых вопросах теории моментов. — Харьков, 1938. — С. 171.

[2] Это же понятие под названием строгой нормированности рассматривалось позже М.Г. Крейном [6].