ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ

(ТРЕТЬЕ СООБЩЕНИЕ)*)

Введение

В 1906 г. П. Фату [2] установил, что если тригонометрический ряд

$$\mathfrak{T}(x) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_{n_k}\cos n_k x + b_{n_k}\sin n_k x)$$

сходится в каждой точке некоторого отрезка $[a,b]$, а возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ является достаточно редкой, то ряд $\mathfrak{T}(x)$ абсолютно сходится, т.е.

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_{n_k}| + |b_{n_k}|) < \infty.$$

Впоследствии А. Зигмунд (см. [18] или [17, § 5.7.10]) отметил, что рассуждения Фату проходят в том случае, если

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \mu > 3 \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

Этот результат Фату получил развитие в нескольких различных направлениях.

Прежде всего, С. Сидон [9, 10] (см. также [17, § 6.4], где, впрочем, результат Сидона приведен не полностью, и [14]) доказал такую теорему.

Теорема Сидона (A). *Пусть $f(x)$ — суммируемая функция, ограниченная сверху. Если ее ряд Фурье является лакунарным, т.е. имеет вид*

$$\mathfrak{S}[f] \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_{n_k}\cos n_k x + b_{n_k}\sin n_k x), \tag{0.1}$$

где

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \lambda > 1 \qquad (k = 1, 2, \dots),$$

то этот ряд абсолютно сходится.

Позже С. Сидон [13] установил следующее более общее предложение.

Теорема Сидона (B). *Пусть $f(x)$ — суммируемая функция, ограниченная сверху. Если ее ряд Фурье имеет вид* (0.1), *где последовательность $\{n_k\}$ разбивается на конечное число лакунарных, то этот ряд абсолютно сходится*[1]*.*

При доказательстве обеих теорем Сидон использует свойства тригонометрических полиномов вида

$$T_p(x) = \prod_{k=1}^{p}(1 + \alpha_k \cos m_k x),$$

впервые построенных Ф. Риссом [6] для другой цели.

---

*) Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. Т. 20. С. 385–412.

[1] Доказательство этой теоремы, данное Сидоном, не безупречно.

Далее А. Зигмунд [18] (см. также [17, § 5.7.10]) получил прямое обобщение теоремы Фату.

Теорема Зигмунда. *Пусть лакунарный тригонометрический ряд* $\mathfrak{T}(x)$, *где* $n_{k+1}/n_k \geqslant \lambda > 1$, *сходится в каждой точке некоторого отрезка* $[a, b]$. *Тогда этот ряд абсолютно сходится.*

Наконец, из результатов Зигмунда без труда выводится такое, несколько более общее предложение (см. [4, с. 452–453]).

Теорема о категориях. *Пусть лакунарный тригонометрический ряд* $\mathfrak{T}(x)$, *где* $n_{k+1}/n_k \geqslant \lambda > 1$, *сходится в каждой точке некоторого множества* $E \subseteq$ $\subseteq [0, 2\pi]$ *не первой категории. Тогда этот ряд абсолютно сходится.*

Иными словами, для лакунарных тригонометрических рядов имеет место следующая альтернатива: в зависимости от того, будет ряд

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_{n_k}| + |b_{n_k}|)$$

сходиться или расходиться, лакунарные тригонометрические ряды будут или абсолютно сходиться, или же расходиться на множествах точек второй категории. Это предложение представляет собой весьма редкий пример теоремы о тригонометрических рядах, в формулировку которой входит понятие категории.

Настоящая работа посвящена изучению абсолютной сходимости рядов Фурье с лакунами и примыкает как к исследованиям Сидона, так и к работам автора [14, 15].

Пусть $N = \{n_k\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Если последовательность N обладает тем свойством, что для всякой непрерывной функции $f(x)$, имеющей ряд Фурье вида

$$\mathfrak{S}[f] \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_{n_k}\cos n_k x + b_{n_k}\sin n_k x) \qquad (n_k \in N),$$

этот ряд абсолютно сходится, то будем говорить, что последовательность N принадлежит классу $\mathfrak{A}$. Обозначая через $Л$ класс всех лакунарных последовательностей и через $Л_\sigma$ — класс всех последовательностей, которые можно разбить на конечное число лакунарных, выводим из результатов Сидона, что

$$Л \subset Л_\sigma \subseteq \mathfrak{A}.$$

Сидоном [12] рассматривались также необходимые условия для того, чтобы $N \in \mathfrak{A}$.

Нам не удалось полностью охарактеризовать класс последовательностей $N \in$ $\in \mathfrak{A}$. Однако мы получили как достаточные условия для того, чтобы $N \in \mathfrak{A}$, более широкие, чем условия Сидона, так и новые необходимые условия для того, чтобы последовательность N принадлежала классу $\mathfrak{A}$. Вопрос о локализации полученных результатов в духе теоремы Зигмунда или теоремы о категориях нами не рассматривался.

План работы таков. В § 1 рассматриваются простые свойства некоторых редких последовательностей натуральных чисел.

В § 2 изучаются достаточные условия для того, чтобы $N \in \mathfrak{A}$. Мы указываем некоторый класс $\mathfrak{R}_\sigma$ возрастающих последовательностей натуральных чисел, более широкий, чем класс $Л_\sigma$, относительно которого устанавливается, что $\mathfrak{R}_\sigma \subseteq \mathfrak{A}$. Определение класса $\mathfrak{R}_\sigma$ зависит от арифметических свойств последовательностей N. Аналогичные арифметические свойства, выражаемые в терминах числа решений определенных диофантовых уравнений, уже неоднократно встречались в теории тригонометрических рядов (см., например, [17, § 5.4; 11; 12]). По-видимому, они отвечают существу рассматриваемых задач.

§ 3 посвящен необходимым условиям для того, чтобы $N \in \mathfrak{A}$. Опираясь на одну важную теорему Литтлвуда [3], мы показываем, в частности, что если $N \in \mathfrak{A}$, то

$$n_k \geqslant \gamma^k \qquad (k = 2, 3, \dots)$$

для некоторого $\gamma > 1$. Таким образом, все последовательности $N \in \mathfrak{A}$ растут не медленнее некоторой показательной функции. Как показывают простейшие примеры, этот результат не может быть улучшен.

Наконец, в § 4 исследуются уединенные коэффициенты Фурье суммируемых функций [2)] и наилучшие приближения непрерывных функций, представимых тригонометрическими рядами с лакунами. Эти задачи тесно примыкают к рассмотренным выше.

§ 1. О некоторых последовательностях натуральных чисел

В этом параграфе исследуются свойства некоторых классов “достаточно редких” последовательностей натуральных чисел. Полученные здесь результаты используются в дальнейших разделах работы.

Последовательности класса $Л_\sigma$. Пусть $\lambda > 1$ и $N = \{n_k\}$ $(k = 1, 2, \dots)$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Будем говорить, что последовательность N принадлежит классу $Л(\lambda)$, если

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \lambda > 1 \qquad (k = 1, 2, \dots). \tag{1.1}$$

Далее, через $Л$ обозначим класс всех *лакунарных* последовательностей N, так что

$$Л = \bigcup_{\lambda > 1} Л(\lambda).$$

Наконец, через $Л_\sigma$ обозначим класс всех последовательностей N, которые могут быть разбиты на конечное число лакунарных, т.е. допускают представление

$$N = \bigcup_{j=1}^{r} N^{(j)}, \quad \text{где} \quad N^{(j)} \in Л \qquad (j = 1, 2, \dots, r). \tag{1.2}$$

Структура последовательностей класса $Л$ весьма проста: $N \in Л$ в том и только том случае, если

$$\varliminf_{k \to \infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = \gamma > 1. \tag{1.3}$$

Наша ближайшая цель — исследовать структуру последовательностей класса $Л_\sigma$.

Через $N(n)$ мы будем обозначать число членов последовательности N, не превосходящих n:

$$N(n) = \sum_{n_k \leqslant n} 1.$$

---

2) Определение этого понятия см. на с. 19.

Лемма 1. *Для того чтобы $N \in Л_\sigma$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из следующих условий*:

1) *существует натуральное s, для которого*

$$\frac{n_{k+s}}{n_k} \geqslant \lambda > 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots); \tag{1.4}$$

2) $$\sum_{k=1}^{p} n_k = O(n_p); \tag{1.5}$$

3) $$N(2n) - N(n) = O(1). \tag{1.6}$$

Доказательство. Мы покажем, что

$$(1.4) \to (1.2) \to (1.5) \to (1.6) \to (1.4).$$

Прежде всего, ясно, что (1.4) влечет (1.2) с $r = s$; достаточно положить

$$N^{(j)} = \{n_k^{(j)}\}, \quad \text{где} \quad n_k^{(j)} = n_{(k-1)s+j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, s; \quad k = 1, 2, \ldots).$$

Далее, пусть выполняется условие (1.2) и

$$\frac{n_{k+1}^{(j)}}{n_k^{(j)}} \geqslant \lambda > 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r; \quad k = 1, 2, \ldots). \tag{1.7}$$

Зафиксируем натуральное p и обозначим через p_j наибольший номер, для которого

$$n_{p_j}^{(j)} \leqslant n_p.$$

В силу (1.7) имеем

$$\sum_{k=1}^{p_j} n_k^{(j)} = n_{p_j}^{(j)} \sum_{k=1}^{p_j} \frac{n_k^{(j)}}{n_{p_j}^{(j)}} \leqslant n_{p_j}^{(j)} \sum_{k=1}^{p_j} \lambda^{k-p_j} < \frac{\lambda}{\lambda - 1}\, n_{p_j}^{(j)}.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{p} n_k = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{p_j} n_k^{(j)} \leqslant \frac{\lambda}{\lambda - 1} \sum_{j=1}^{r} n_{p_j}^{(j)} \leqslant \frac{\lambda}{\lambda - 1} \sum_{j=1}^{r} n_p = \frac{\lambda r}{\lambda - 1}\, n_p = O(n_p),$$

т.е. выполняется условие (1.5).

Пусть теперь

$$\sum_{k=1}^{p} n_k \leqslant M n_p \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

где M — некоторое натуральное число. В силу монотонности последовательности N отсюда вытекает, что

$$2M n_{p+1} \leqslant \sum_{k=p+1}^{p+2M} n_k \leqslant \sum_{k=1}^{p+2M} n_k \leqslant M n_{p+2M} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots),$$

т.е.

$$n_{p+2M} \geqslant 2 n_{p+1} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.8}$$

Зафиксируем натуральное число n, и пусть

$$n_p \leqslant n < n_{p+1} \qquad (p \geqslant 0, \quad n_0 = 0),$$

так что $N(n) = p$. Тогда в силу (1.8)

$$n_{p+2M} \geqslant 2n_{p+1} > 2n$$

и, следовательно, $N(2n) < p + 2M$. Отсюда

$$N(2n) - N(n) < p + 2M - p = 2M = O(1),$$

т.е. выполняется (1.6).

Пусть, наконец,

$$N(2n) - N(n) \leqslant Q \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда, выбирая $p \geqslant 0$ из условий $n_p \leqslant n < n_{p+1}$, будем иметь

$$N(n) = p, \qquad N(2n) \leqslant N(n) + Q = p + Q,$$

откуда

$$n_{p+Q+1} > 2n \geqslant 2n_p,$$

т.е.

$$\frac{n_{p+s}}{n_p} \geqslant 2 \qquad (s = Q + 1, \quad p = 1, 2, \ldots),$$

что означает выполнение условия (1.4). Лемма доказана.

Отметим, что из условия (1.6) непосредственно вытекает, что для последовательностей $N \in Л_\sigma$

$$N(qn) - N(n) = O(1) \tag{1.9}$$

для любого $q > 1$. Далее, разбивая, если это необходимо, каждую из последовательностей $N^{(j)}$, входящих в представление (1.2), на конечное число частей, убеждаемся, что если $N \in Л_\sigma$, то ее можно представить в форме

$$N = \bigcup_{j=1}^{r} N^{(j)}, \quad \text{где} \quad N^{(j)} \in Л(\mu) \tag{1.10}$$

и μ — любое наперед заданное число, большее 1.

Заметим, что при доказательстве леммы 1 мы нигде не использовали того факта, что числа n_k натуральные; таким образом, эта лемма переносится на любые, неубывающие последовательности положительных чисел.

Последовательности класса $\mathfrak{R}$. Пусть $N = \{n_k\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим через $P_s(n)$ число различных представлений целого n в форме

$$n = \sum_{j=1}^{s} \varepsilon_j n_{k_j}, \tag{1.11}$$

где $\varepsilon_j = \pm 1$ и $0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_s$. Представление (1.11) мы будем называть *s-членным представлением* числа n. Положим

$$P_s = \sup_n P_s(n);$$

при этом не исключается, что для некоторых s $P_s = \infty$. Так как для любой последовательности N

$$P_s(n) = P_s(-n),$$

то ясно, что величину P_s можно также определить формулой

$$P_s = \sup_{n \geqslant 0} P_s(n),$$

т.е. при помощи s-членных представлений неотрицательных n.

Если для всех натуральных s

$$P_s \leqslant A^s, \tag{1.12}$$

где $A \geqslant 1$, то будем говорить, что последовательность N принадлежит классу $\mathfrak{R}(A)$. Наконец, положим

$$\mathfrak{R} = \bigcup_{A \geqslant 1} \mathfrak{R}(A),$$

так что $N \in \mathfrak{R}$ в том и только том случае, если

$$\varlimsup_{s \to \infty} \frac{1}{s} \ln P_s < \infty.$$

Изучим некоторые свойства последовательностей класса $\mathfrak{R}$. Как впервые отметил Ф. Рисс [6], если последовательность N является достаточно редкой, то $N \in \mathfrak{R}$. Точнее, пусть

$$2 \sum_{k=1}^{p} n_k < n_{p+1} \qquad (p = 1, 2, \ldots); \tag{1.13}$$

тогда для любых натуральных s и s' и любых ε_j, $\varepsilon'_j = \pm 1$

$$\sum_{j=1}^{s} \varepsilon_j n_{k_j} \neq \sum_{j=1}^{s'} \varepsilon'_j n'_{k_j},$$

кроме того случая, когда

$$s = s', \quad \varepsilon_j = \varepsilon'_j, \quad k_j = k'_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, s);$$

в частности, $N \in \mathfrak{R}(1)$. В самом деле, иначе мы имели бы

$$\sum_{j=1}^{t} \eta_j n_{l_j} = 0,$$

где η_j может принимать значения -2, -1, 1, 2 и $0 < l_1 < l_2 < \ldots < l_t$. Но такое равенство невозможно, так как в силу (1.13)

$$\left| \sum_{j=1}^{t} \eta_j n_{l_j} \right| \geqslant |\eta_t n_{l_t}| - \sum_{j=1}^{t-1} |\eta_j n_{l_j}| \geqslant n_{l_t} - 2 \sum_{k=1}^{l_t - 1} n_k > 0.$$

Условие (1.13) выполняется, например, если

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \lambda \geqslant 3 \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{1.14}$$

так как тогда

$$2 \sum_{k=1}^{p} n_k = 2n_{p+1} \sum_{k=1}^{p} \frac{n_k}{n_{p+1}} \leqslant 2n_{p+1} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{k-p-1} < \frac{2}{\lambda - 1} n_{p+1} \leqslant n_{p+1}.$$

Покажем, что класс $Л_\sigma$ не охватывает класса $\mathfrak{R}$.

Лемма 2. *Существует последовательность N, для которой*

$$N \in \mathfrak{R}, \qquad N \notin Л_\sigma.$$

Доказательство. Искомую последовательность будем строить индуктивно. Положим $n_1 = 1$. Далее, если числа $n_1, \ldots, n_{p^2}$ уже определены, то построим числа $n'_{p^2+1}, \ldots, n'_{(p+1)^2}$ из условий

$$n'_{p^2+r} = 2\left\{\sum_{k=1}^{p^2} n_k + \sum_{j=1}^{r-1} n'_{p^2+j}\right\} + 1 \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2p+1) \tag{1.15}$$

и положим

$$n_{p^2+r} = n'_{p^2+r} + m_p \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2p+1),$$

где

$$m_p > 2\left\{\sum_{k=1}^{p^2} n_k + \sum_{j=1}^{2p+1} n'_{p^2+j}\right\} \qquad (p = 1, 2, \ldots). \tag{1.16}$$

Покажем, что $N \notin Л_\sigma$. Для этого отметим, что

$$n_{p^2+1} = n'_{p^2+1} + m_p > m_p,$$

$$n_{(p+1)^2} = n'_{(p+1)^2} + m_p = 2\left\{\sum_{k=1}^{p^2} n_k + \sum_{j=1}^{2p} n'_{p^2+j}\right\} + 1 + m_p \leqslant 2m_p.$$

Отсюда следует, что

$$N(m_p) \leqslant N(n_{p^2+1}) = p^2 + 1,$$
$$N(2m_p) \geqslant N(n_{(p+1)^2}) = (p+1)^2.$$

Таким образом,

$$N(2m_p) - N(m_p) \geqslant (p+1)^2 - p^2 - 1 = 2p \to \infty \qquad (p \to \infty),$$

откуда в силу леммы 1 $N \notin Л_\sigma$.

Покажем, что $N \in \mathfrak{R}(1) \subset \mathfrak{R}$. Для этого допустим, что некоторое целое n имеет два представления:

$$n = \sum_{j=1}^{s} \varepsilon_j n_{k_j} = \sum_{j=1}^{s'} \varepsilon'_j n'_{k_j}, \tag{1.17}$$

и придем к противоречию. Из (1.17) вытекает, что

$$0 = \sum_{j=1}^{t} \eta_j n_j, \tag{1.18}$$

где η_j может принимать значения -2, -1, 0, 1, 2. Без ограничения общности можно считать $\eta_t \neq 0$. Пусть

$$p^2 < t \leqslant (p+1)^2.$$

Тогда, выражая n_j $(p^2 < j \leqslant (p+1)^2)$ через n'_j, выводим из (1.18), что

$$\sum_{j=1}^{p^2} \eta_j n_j + \sum_{j=p^2+1}^{t} \eta_j n'_j + a m_p = 0,$$

где $\eta_t \neq 0$ и a — некоторое целое число. Рассмотрим два случая: $a = 0$ и $a \neq 0$. В первом случае имеем

$$\sum_{j=1}^{p^2} \eta_j n_j + \sum_{j=p^2+1}^{t} \eta_j n_j' = 0.$$

Но это равенство невозможно, так как в силу (1.15)

$$n_t' > 2\left\{\sum_{j=1}^{p^2} n_j + \sum_{j=p^2+1}^{t-1} n_j'\right\}.$$

Если же $a \neq 0$, то имеем, в силу (1.16)

$$m_p > 2\left\{\sum_{j=1}^{p^2} n_j + \sum_{j=p^2+1}^{(p+1)^2} n_j'\right\} \geqslant 2\left\{\sum_{j=1}^{p^2} n_j + \sum_{j=p^2+1}^{t} n_j'\right\},$$

что вновь показывает невозможность равенства (1.18).

Итак, $N \in \mathfrak{R}(1)$, и лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобится еще оценка для числа членов последовательности $N \in \mathfrak{R}$, не превосходящих n.

Лемма 3. *Пусть $N \in \mathfrak{R}$. Тогда*

$$N(n) = O(\ln n). \tag{1.19}$$

Доказательство. Так как по условию $N \in \mathfrak{R}$, то найдется натуральное число $A > 1$ такое, что

$$P_s(n) \leqslant A^s$$

для всех n и s. Зафиксируем натуральные числа s и p, $s < p$, и рассмотрим числа $n_1, n_2, \ldots, n_p$. С их помощью можно получить

$$B_{p,s} = \frac{(2p)!}{(2s)!(2p-2s)!}$$

различных s-членных представлений чисел n. Все такие числа n заключены в пределах

$$-sn_p < n < sn_p.$$

Отсюда вытекает, что хотя бы одно число n_0 имеет не менее

$$\frac{B_{p,s}}{2sn_p}$$

различных представлений, откуда

$$n_p \geqslant \frac{B_{p,s}}{2sP_s} \geqslant \frac{B_{p,s}}{2sA^s}. \tag{1.20}$$

Оценим это выражение, положив $p = As$. Используя формулу Стирлинга, выводим без труда, что

$$B_{As,s} \approx \frac{A^{2s}}{2\sqrt{\pi s}}\left(\frac{A}{A-1}\right)^{2(A-1)s+1/2}.$$

Отсюда и из (1.20) выводим

$$n_{As} \geqslant \frac{A^s}{4\sqrt{\pi}s^{3/2}}\left(\frac{A}{A-1}\right)^{2(A-1)s+1/2}\{1-o(1)\} \geqslant A^s = A_1^A$$
$$(s \geqslant s_0, \quad A_1 > 1).$$

Поэтому

$$n_k \geqslant A_2^k \qquad (k \geqslant k_0, \quad A_2 > 1)$$

и, следовательно,

$$N(n) = O(\ln n).$$

Лемма доказана.

Последовательности класса $\mathfrak{R}_\sigma$. Если возрастающая последовательность натуральных чисел N допускает конечное представление

$$N = \bigcup_{j=1}^{r} N^{(j)}, \quad \text{где} \quad N^{(j)} \in \mathfrak{R},$$

то будем говорить, что она принадлежит классу $\mathfrak{R}_\sigma$. Этот класс последовательностей будет в дальнейшем играть основную роль. К сожалению, нам не удалось найти для него независимые характеристики, например аналогичные характеристикам класса $Л_\sigma$.

Из проведенного выше анализа классов $Л_\sigma$ и $\mathfrak{R}$ вытекает, что

$$\mathfrak{R}_\sigma \supset Л_\sigma \tag{1.21}$$

со строгим знаком включения и что если $N \in \mathfrak{R}_\sigma$, то

$$N(n) = O(\ln n). \tag{1.22}$$

В самом деле, согласно замечанию к лемме 1, если $N \in Л_\sigma$, то эту последовательность можно представить в форме

$$N = \bigcup_{j=1}^{r} N^{(j)}, \quad \text{где} \quad N^{(j)} \in Л(3).$$

В силу же замечания на с. 6 $N^{(j)} \in \mathfrak{R}$, откуда $N \in \mathfrak{R}_\sigma$. Далее, лемма 2 показывает, что существует последовательность $N \in \mathfrak{R}$, $N \notin Л_\sigma$. Наконец, для вывода оценки (1.22) достаточно заметить, что если каждая последовательность $N^{(j)}$ удовлетворяет условию (1.22), то этому условию удовлетворяет и их объединение, и сослаться на лемму 3.

§ 2. Достаточные условия

В этом параграфе устанавливаются новые достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье с лакунами. В частности, из них вытекает, что

$$\mathfrak{R}_\sigma \subseteq \mathfrak{A}.$$

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — суммируемая функция, ограниченная сверху:*

$$f(x) \leqslant M \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi).$$

Если ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$\mathfrak{S}[f] \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_{n_k}\cos n_k x + b_{n_k}\sin n_k x), \tag{2.1}$$

где $N = \{n_k\} \in \mathfrak{R}_\sigma$, *то этот ряд абсолютно сходится.*

Нам потребуется одна лемма.

Лемма 4. *Пусть последовательность* $M = \{m_k\}$ *принадлежит классу* $\mathfrak{R}(A)$,

$$0 < \alpha \leqslant A^{-1}, \quad |\alpha_k| \leqslant \alpha, \quad 0 \leqslant \varphi_k < 2\pi \qquad (k = 1, 2, \ldots, p). \tag{2.2}$$

Тогда тригонометрический полином

$$T_p(x) = \prod_{k=1}^{p} \{1 + \alpha_k \cos(m_k x - \varphi_k)\} \tag{2.3}$$

обладает следующими свойствами:

1) $T_p(x) \geqslant 0$;

$$2) \qquad T_p(x) = 1 + A_0 + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cos(m_k x - \varphi_k) + \sum_{\nu=1}^{\nu_p} A_\nu \cos(\nu x - \psi_\nu), \tag{2.4}$$

где все номера ν *имеют вид*

$$\nu = \pm m_{k_1} \pm \ldots \pm m_{k_s} \qquad (1 \leqslant k_1 < \ldots < k_s \leqslant p, \quad 2 \leqslant s \leqslant p), \tag{2.5}$$

в частности

$$\nu_p = \sum_{k=1}^{p} m_k \leqslant p m_p \leqslant m_p^2; \tag{2.6}$$

3) $|A_\nu| \leqslant (A\alpha)^2 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, \nu_p)$.

Доказательство. Эта лемма аналогична лемме Сидона [9, 10].

Так как $A \geqslant 1$, то $|\alpha_k| \leqslant 1$, и свойство 1) очевидно. Далее, выполняя перемножение в формуле (2.3) и заменяя произведения косинусов суммами косинусов, получаем

$$T_p(x) - 1 - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cos(m_k x - \varphi_k) =$$

$$= \sum_{s=2}^{p} \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_s \leqslant p} \alpha_{k_1} \ldots \alpha_{k_s} \cos(m_{k_1} x - \varphi_{k_1}) \ldots \cos(m_{k_s} x - \varphi_{k_s}) =$$

$$= \sum_{s=2}^{p} \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_s \leqslant p} \frac{\alpha_{k_1} \ldots \alpha_{k_s}}{2^{s-1}} \cos\big((\pm m_{k_1} \pm \ldots \pm m_{k_s})x - (\pm\varphi_{k_1} \pm \ldots \pm \varphi_{k_s})\big),$$

где допускаются лишь те комбинации знаков $\pm$, для которых

$$\pm m_{k_1} \pm \ldots \pm m_{k_s} \geqslant 0,$$

и если

$$\pm m_{k_1} \pm \ldots \pm m_{k_s} = 0,$$

то из двух таких представлений, отличающихся всеми знаками, берется одно. Отсюда

$$T_p(x) = 1 + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cos(m_k x - \varphi_k) +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\nu_p} \sum_{s=2}^{p} \sum_{\substack{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_s \leqslant p \\ \pm m_{k_1} \pm \ldots \pm m_{k_s} = \nu}} \frac{\alpha_{k_1} \ldots \alpha_{k_s}}{2^{s-1}} \cos\big(\nu x - (\pm\varphi_{k_1} \pm \ldots \pm \varphi_{k_s})\big),$$

где внутренняя сумма берется по всем указанным выше представлениям числа ν. Преобразуя сумму

$$\sum_{s=2}^{p} \sum_{\substack{1\leqslant k_1<\ldots<k_s\leqslant p\\ \pm m_{k_1}\pm\ldots\pm m_{k_s}=\nu}} \frac{\alpha_{k_1}\ldots\alpha_{k_s}}{2^{s-1}} \cos\bigl(\nu x-(\pm\varphi_{k_1}\pm\ldots\pm\varphi_{k_s})\bigr)$$

к виду

$$A_\nu \cos(\nu x-\psi_\nu),$$

убеждаемся, что полином $T_p(x)$ действительно представим в форме (2.4), где все номера ν $(0\leqslant\nu\leqslant\nu_p)$ имеют вид (2.5).

Наконец, оценим коэффициенты A_ν. Имеем

$$|A_\nu|\leqslant \sum_{s=2}^{p} \sum_{\substack{1\leqslant k_1<\cdots<k_s\leqslant p\\ \pm m_{k_1}\pm\cdots\pm m_{k_s}=\nu}} \frac{|\alpha_{k_1}\ldots\alpha_{k_s}|}{2^{s-1}}.$$

Так как по условию $M\in\mathfrak{R}(A)$, то число различных s-членных представлений числа ν не превосходит

$$P_s(\nu)\leqslant A^s.$$

Отсюда и из (2.2) следует

$$|A_\nu|\leqslant \sum_{s=2}^{p}\frac{\alpha^s}{2^{s-1}}P_s(\nu)\leqslant 2\sum_{s=2}^{p}\left(\frac{A\alpha}{2}\right)^s\leqslant (A\alpha)^2 \qquad (\nu=0,1,\ldots,\nu_p),$$

и лемма полностью доказана.

Переходим к доказательству теоремы 1. Без ограничения общности можно положить $a_0=0$, так что ряд $\mathfrak{S}[f]$ имеет вид

$$\mathfrak{S}[f]\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\rho_{n_k}\cos(n_k x-\varphi_{n_k}), \tag{2.7}$$

где $\rho_{n_k}\geqslant 0$ и $N=\{n_k\}\in\mathfrak{R}_\sigma$. Представим последовательность N в форме

$$N=\bigcup_{j=1}^{r}N^{(j)}, \quad \text{где} \quad N^{(j)}\in\mathfrak{R}(A). \tag{2.8}$$

Тогда можем написать

$$\sum_{k=1}^{\infty}\rho_{n_k}\cos(n_k x-\varphi_{n_k})=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^{(j)}\cos(n_k^{(j)}x-\varphi_k^{(j)}).$$

Зафиксируем натуральное число n, и пусть

$$n_{p_j}^{(j)}\leqslant n<n_{p_j+1}^{(j)} \qquad (j=1,2,\ldots,r).$$

Воспользуемся леммой 4, положив в ней

$$p=p_j, \quad m_k=n_k^{(j)}, \quad \alpha_k=\frac{1}{B}, \quad \varphi_k=\varphi_k^{(j)} \qquad (k=1,2,\ldots,p_j),$$

где

$$B=3A^2r.$$

Получаем, что существуют тригонометрические полиномы вида

$$T_{p_j}(x) = 1 + A_0^{(j)} + B^{-1} \sum_{n_k^{(j)} \leqslant n} \cos\bigl(n_k^{(j)} x - \varphi_k^{(j)}\bigr) + \\ + \sum_{\nu \leqslant n^2} A_\nu^{(j)} \cos\bigl(\nu x - \psi_\nu^{(j)}\bigr) \qquad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

удовлетворяющие условиям

$$T_{p_j}(x) \geqslant 0, \qquad |A_\nu^{(j)}| \leqslant \left(\frac{A}{B}\right)^2 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Исходя из этих полиномов, построим полином

$$T_{(n)}(x) = B \sum_{j=1}^{r} T_{p_j}(x) =$$

$$= B \sum_{j=1}^{r} \left\{ 1 + A_0^{(j)} + B^{-1} \sum_{n_k^{(j)} \leqslant n} \cos\bigl(n_k^{(j)} x - \varphi_k^{(j)}\bigr) + \sum_{\nu \leqslant n^2} A_\nu^{(j)} \cos\bigl(\nu x - \psi_\nu^{(j)}\bigr) \right\} =$$

$$= Br + A_0 + \sum_{n_k \leqslant n} \cos\,(n_k x - \varphi_k) + \sum_{\nu \leqslant n^2} A_\nu \cos\,(\nu x - \psi_\nu),$$

где теперь

$$|A_\nu| \leqslant Br \max_j |A_\nu^{(j)}| \leqslant Br \left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{A^2 r}{B} \leqslant \frac{1}{3} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.9}$$

Кроме того,

$$T_{(n)}(x) \geqslant 0,$$

$$\int_0^{2\pi} |T_{(n)}(x)|\, dx = \int_0^{2\pi} T_{(n)}(x)\, dx = 2\pi(Br + A_0) \leqslant C_1 A^2 r^2.$$

Воспользуемся равенством Парсеваля. Получаем

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T_{(n)}(x) f(x)\, dx = \sum_{n_k \leqslant n} \rho_{n_k} + \sum_{n_k \leqslant n^2} A_{n_k} (a_{n_k} \cos \psi_{n_k} + b_{n_k} \sin \psi_{n_k}).$$

В силу (2.9)

$$\left| \sum_{n_k \leqslant n^2} A_{n_k} (a_{n_k} \cos \psi_{n_k} + b_{n_k} \sin \psi_{n_k}) \right| \leqslant \frac{1}{3} \sum_{n_k \leqslant n^2} \rho_{n_k}.$$

С другой стороны, так как $f(x) \leqslant M$ и $T_n(x) \geqslant 0$, то

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T_{(n)}(x) f(x)\, dx \leqslant \frac{M}{\pi} \int_0^{2\pi} T_{(n)}(x)\, dx \leqslant C_2 A^2 r^2 M.$$

Отсюда

$$\sum_{n_k \leqslant n} \rho_{n_k} \leqslant C_2 A^2 r^2 M + \frac{1}{3} \sum_{n_k \leqslant n^2} \rho_{n_k}. \tag{2.10}$$

Итерируя это неравенство, получаем

$$\sum_{n_k\leqslant n}\rho_{n_k}\leqslant C_2A^2r^2M\sum_{i=0}^{s-1}3^{-i}+3^{-s}\sum_{n_k\leqslant n^{2^s}}\rho_{n_k}\qquad(s=1,2,\ldots).$$

Заметим, что так как согласно (1.22)

$$N(n)=O(\ln n),$$

то при фиксированном n

$$N(n^{2^s})=O(2^s)$$

и, следовательно,

$$\sum_{n_k\leqslant n^{2^s}}\rho_{n_k}=O(N(n^{2^s}))=O(2^s).$$

Отсюда вытекает

$$\sum_{n_k\leqslant n}\rho_{n_k}\leqslant C_2A^2r^2M\sum_{i=0}^{s-1}3^{-i}+O\left(\frac{2}{3}\right)^s.$$

Устремляя s к ∞, получаем, что

$$\sum_{n_k\leqslant n}\rho_{n_k}\leqslant C_2A^2r^2M\sum_{i=0}^{\infty}3^{-i}=C_3A^2r^2M.$$

Наконец, полагая $n\to\infty$, выводим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\rho_{n_k}\leqslant C_3A^2r^2M,\tag{2.11}$$

и теорема доказана.

Отметим два следствия.

Замечая, что согласно результатам § 1 $Л_\sigma\subset\mathfrak{R}_\sigma$, и учитывая лемму 1, выводим из теоремы 1 такое следствие, эквивалентное теореме Сидона (B).

Следствие 1. *Пусть $f(x)$ — суммируемая функция, ограниченная сверху. Если ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид* (2.1), *где последовательность $N=\{n_k\}$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{p}n_k=O(n_p),\tag{2.12}$$

или (что то же самое) условию

$$\frac{n_{k+r}}{n_k}\geqslant\lambda>1\qquad(k=1,2,\ldots)\tag{2.13}$$

для некоторого фиксированного r, то ряд $\mathfrak{S}[f]$ абсолютно сходится.

Далее, напомним, что С. Банах [1] доказал такую теорему.

Теорема Банаха. *Следующие свойства последовательностей $N=\{n_k\}$ эквивалентны*:

α) для любой ограниченной измеримой функции $f(x)$, имеющей ряд Фурье вида (2.1), *где $n_k\in N$, этот ряд абсолютно сходится;*

β) для любых последовательностей $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$, где $\alpha_k, \beta_k \to 0$ $(k \to \infty)$, найдется суммируемая функция $f(x)$, для которой

$$a_{n_k} = \alpha_k, \quad b_{n_k} = \beta_k \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Сопоставляя эту теорему с теоремой 1, получаем

Следствие 2. *Пусть $N \in \mathfrak{R}_\sigma$. Тогда для любых последовательностей $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$, удовлетворяющих условию*

$$\alpha_k, \beta_k \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

найдется суммируемая функция $f(x)$, для которой

$$a_{n_k} = \alpha_k, \quad b_{n_k} = \beta_k \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Сделаем несколько замечаний.

Учитывая оценку (2.11), без труда получаем, что если

$$|f(x)| \leqslant M \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$$

и последовательность $N \in \mathfrak{R}_\sigma$ допускает представление

$$N = \bigcup_{j=1}^{r} N^{(j)}, \quad \text{где} \quad N^{(j)} \in \mathfrak{R}(A) \qquad (j = 1, 2, \ldots), \tag{2.14}$$

то

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{n_k} \leqslant C_4 A^2 r^2 M, \tag{2.15}$$

где C_4 — абсолютная константа.

Отметим также, что из результатов § 1 и теоремы 1 вытекают включения

$$Л \subset Л_\sigma \subset \mathfrak{R}_\sigma \subseteq \mathfrak{A}. \tag{2.16}$$

Возможно, что $\mathfrak{R}_\sigma = \mathfrak{A}$. Во всяком случае методом, основанным на использовании полиномов Ф. Рисса, не удается получить более общих результатов.

§ 3. Необходимые условия

В этом параграфе исследуются условия, необходимые для того, чтобы последовательность N принадлежала классу $\mathfrak{A}$.

Впервые такого рода условия рассматривались С. Сидоном [12], который показал, что если $N \in \mathfrak{A}$, то

$$n_k \geqslant e^{k^{1-\varepsilon}} \qquad (k \geqslant k_0(\varepsilon)) \tag{3.1}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Поскольку этот результат был высказан Сидоном в несколько иной форме, мы приведем здесь его простое доказательство.

Допустим, что $N \in \mathfrak{A}$, и покажем, что тогда

$$\sum_{k=2}^{\infty} \ln^{-1-\eta} n_k < \infty \tag{3.2}$$

для любого $\eta > 0$. В самом деле, если для некоторого $\eta > 0$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \ln^{-1-\eta} n_k = \infty,$$

то положим

$$a_{n_k} = S_k^{-1} \ln^{-1-\eta} n_k \qquad (k = 2, 3, \ldots), \quad \text{где} \quad S_k = \sum_{\varkappa=2}^{k} \ln^{1-\eta} n_\varkappa. \tag{3.3}$$

Тогда будем иметь

$$a_{n_k} > 0, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} a_{n_k} = \sum_{k=2}^{\infty} \ln^{-1-\eta} n_k \cdot S_k^{-1} = \infty, \tag{3.4}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_{n_k}^2 \ln^{1+\eta} n_k = \sum_{k=2}^{\infty} \ln^{-1-\eta} n_k S_k^{-2} < \infty. \tag{3.5}$$

Воспользуемся теперь следующей теоремой Палея и Зигмунда [5] (см. также [17, § 5.61]): пусть $\eta > 0$ и сходится ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \ln^{1+\eta} n;$$

тогда для почти всех комбинаций знаков $\pm$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

есть ряд Фурье некоторой непрерывной функции $f(x)$. В силу (3.5) из этой теоремы вытекает, что если последовательность $\{a_{n_k}\}$ определяется формулами (3.3), то существует такая комбинация знаков, для которой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \pm a_{n_k} \cos n_k x$$

есть ряд Фурье некоторой непрерывной функции. Однако согласно (3.4) этот ряд не является абсолютно сходящимся и, следовательно, $N \notin \mathfrak{A}$.

Остается показать, что условия (3.1) и (3.2) эквивалентны. С одной стороны, если имеет место (3.1), то

$$\ln^{-1-\eta} n_k \leqslant k^{-(1-\varepsilon)(1+\eta)} \qquad (k \geqslant k_0),$$

откуда

$$\sum_{k=2}^{\infty} \ln^{-1-\eta} n_k < \infty$$

для любого $\eta > \varepsilon/(1-\varepsilon)$, т.е. в силу произвольности ε для любого $\eta > 0$. С другой стороны, если имеет место (3.2), то по теореме Оливье—Абеля

$$\ln^{-1-\eta} n_k = o(k^{-1}),$$

откуда

$$n_k \geqslant e^{k^{1/(1+\eta)}} \qquad (k \geqslant k_0),$$

что в силу произвольности $\eta > 0$ эквивалентно (3.1).

Для получения дальнейших необходимых условий мы воспользуемся следующим замечанием С. Банаха [1]: для того чтобы $N \in \mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая константа K, что для любого натурального p и любых $\{a_{n_k}\}$, $\{b_{n_k}\}$ имело бы место неравенство

$$\sum_{k=1}^{p}(|a_{n_k}|+|b_{n_k}|)\leqslant K\left\|\sum_{k=1}^{p}(a_{n_k}\cos n_kx+b_{n_k}\sin n_kx)\right\|, \tag{3.6}$$

где

$$\|\varphi(x)\|=\max_x|\varphi(x)|.$$

Иначе говоря, для того чтобы $N\in\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы была ограничена последовательность $\{S_p[N]\}$, где

$$S_p[N]=\sup\sum_{k=1}^{p}(|a_{n_k}|+|b_{n_k}|)\qquad(p=1,2,\ldots), \tag{3.7}$$

и верхняя грань берется по всевозможным тригонометрическим полиномам вида

$$T_p(x)=\sum_{k=1}^{p}(a_{n_k}\cos n_kx+b_{n_k}\sin n_kx), \tag{3.8}$$

удовлетворяющим условию $\|T_p(x)\|\leqslant 1$.

Таким образом, для доказательства того факта, что та или иная последовательность N не принадлежит классу $\mathfrak{A}$, достаточно построить тригонометрические полиномы вида (3.8), для которых последовательность

$$S_p(T_p)=\frac{\sum_{k=1}^{p}(|a_{n_k}|+|b_{n_k}|)}{\|T_p(x)\|}\qquad(p=1,2,\ldots)$$

не ограничена.

Экстремальная задача, определяемая формулой (3.7), изучена еще недостаточно подробно. В этом направлении нам известна только важная теорема Литтлвуда [3], на которую мы и будем опираться. Возможно, потому, что те необходимые условия для $N\in\mathfrak{A}$, которые излагаются в этом параграфе, не окончательны.

Теорема Литтлвуда. *Пусть $a_n\geqslant 0$ $(0\leqslant n\leqslant m)$. Тогда существуют действительные числа $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_m$, для которых*

$$\max_{|z|=1}\left|\sum_{n=0}^{m}a_ne^{2\pi i\beta_n}z^n\right|\leqslant A\sqrt{\sum_{n=0}^{m}a_n^2\cdot\ln(m+2)}, \tag{3.9}$$

где A — абсолютная константа.

Отметим, что эта теорема Литтлвуда была затем передоказана Р. Салемом (см. [7] и для тригонометрического случая [8]).

Зададим возрастающую последовательность номеров $M=\{m_k\}$ и положим в теореме Литтлвуда $a_n=1$ для $n=m_k$ $(k=1,2,\ldots,p)$ и $a_n=0$ в противном случае. Тогда $m=m_p$ и мы получаем, что существуют действительные числа β_k $(k=1,2,\ldots,p)$, для которых

$$\max_{|z|=1}\left|\sum_{k=1}^{m}e^{2\pi i\beta_k}z^{m_k}\right|\leqslant A\sqrt{p\ln(m_p+2)}. \tag{3.10}$$

Переходим к формулировке основного результата этого параграфа. Пусть M — натуральное число, а P принимает значения $0,1,\ldots,M-1$. Обозначим через

$\{m_s(M,P)\}$ возрастающую последовательность натуральных чисел, состоящую из тех членов $\{n_{k_s}\}$ последовательности N, для которых

$$n_{k_s} \equiv P \,(\mathrm{mod}\ M).$$

Ясно, что для каждого фиксированного M хотя бы одна из последовательностей $\{m_s(M,P)\}$ $(P = 0, 1, \ldots, M-1)$ бесконечна.

Теорема 2. *Если $N \in \mathfrak{A}$, то для любого натурального M, любого $P = 0, 1, \ldots, M-1$ и любых натуральных p и q $(p < q)$*

$$\ln\left\{\frac{m_q(M,P) - m_p(M,P)}{M} + 2\right\} \geqslant B(q-p), \tag{3.11}$$

где B — положительная константа.

Иными словами, условие (3.11) необходимо для того, чтобы $N \in \mathfrak{A}$.

Доказательство. Допустим, что условие (3.11) не выполняется, и покажем, что тогда $N \notin \mathfrak{A}$. Отрицание условия (3.11) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа M, P, p и $q > p$, для которых

$$\ln\left\{\frac{m_q(M,P) - m_p(M,P)}{M} + 2\right\} < \varepsilon(q-p). \tag{3.12}$$

Согласно определению последовательности $\{m_p(M,P)\}$ числа

$$n'_p = \frac{m_p(M,P) - P}{M}$$

являются целыми. Воспользуемся неравенством (3.10), положив в нем

$$m_{l-p+1} = n'_l - n'_p = \frac{m_l(M,P) - m_p(M,P)}{M} \qquad (l = p, p+1, \ldots, q).$$

Получаем, что существуют числа β_l $(l = p, p+1, \ldots, q)$, для которых

$$\max_{|z|=1}\left|\sum_{l=p}^{q} e^{2\pi i\beta_l} z^{\frac{m_l(M,P)-m_p(M,P)}{M}}\right| \leqslant A\sqrt{(q-p+1)\ln\left\{\frac{m_q(M,P)-m_p(M,P)}{M}+2\right\}}.$$

Отсюда

$$\max_{|z|=1}\left|\sum_{l=p}^{q} e^{2\pi i\beta_l} z^{\frac{m_l(M,P)}{M}}\right| \leqslant A\sqrt{(q-p+1)\ln\left\{\frac{m_q(M,P)-m_p(M,P)}{M}+2\right\}}.$$

Заменяя в этом неравенстве z на e^{iMx} и оценивая правую часть согласно (3.12), выводим, что

$$\max_{x}\left|\sum_{l=p}^{q} e^{i\{2\pi\beta_l + m_l(M,P)x\}}\right| \leqslant A\sqrt{\varepsilon}(q-p+1),$$

т.е.

$$\max_{x}\left|\sum_{l=p}^{q} e^{i(n_{k_l}x + 2\pi\beta_l)}\right| \leqslant A\sqrt{\varepsilon}(q-p+1). \tag{3.13}$$

Теперь остается только заметить, что тригонометрический полином

$$T_{k_q}(x) = \operatorname{Re}\sum_{l=p}^{q} e^{i(n_{k_l}x + 2\pi\beta_l)} = \sum_{l=p}^{q}(a_{n_{k_l}}\cos n_{k_l}x + b_{n_{k_l}}\sin n_{k_l}x)$$

удовлетворяет условиям

$$\|T_{k_q}(x)\| \leqslant A\sqrt{\varepsilon}(q-p+1),$$

$$\sum_{l=p}^{q}(|a_{n_{k_l}}|+|b_{n_{k_l}}|) \geqslant \sum_{l=p}^{q}\sqrt{a_{n_{k_l}}^2+b_{n_{k_l}}^2} = q-p+1,$$

откуда

$$S_{k_q}(T_{k_q}) = \frac{\sum_{l=p}^{q}(|a_{n_{k_l}}|+|b_{n_{k_l}}|)}{\|T_{k_q}(x)\|} \geqslant \frac{q-p+1}{A\sqrt{\varepsilon}(q-p+1)} = \frac{1}{A\sqrt{\varepsilon}}.$$

В силу произвольности ε отсюда вытекает, что последовательность $\{S_{k_q}(T_{k_q})\}$ не ограничена, и теорема доказана.

Замечание Банаха без труда переносится на степенные ряды в единичном круге. Поэтому, используя оценку (3.13), немедленно получаем, что если последовательность N не удовлетворяет условию (3.11), то существует функция вида

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n_k} z^{n_k},$$

аналитическая в круге $|z| < 1$ и непрерывная в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, для которой $n_k \in N$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n_k}| = \infty.$$

Условие (3.11) мало прозрачно. Однако из теоремы 2 непосредственно вытекает такое

Следствие. *Если $N \in \mathfrak{A}$, то*

$$n_k \geqslant C\gamma^k \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{3.14}$$

где $C > 0$, $\gamma > 1$.

Достаточно положить в (3.11) $M = 1$, $p = 1$.

Итак, если $N \in \mathfrak{A}$, то эта последовательность растет не медленнее некоторой показательной функции. В частности, если

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \to 1 \qquad (k \to \infty),$$

то $N \notin \mathfrak{A}$. Таким образом, если $N \in \mathfrak{A}$, то эта последовательность имеет бесконечно много таких лакун, что

$$\frac{n_{k_s+1}}{n_{k_s}} \geqslant \lambda > 1 \qquad (s = 1, 2, \ldots).$$

§ 4. Родственные задачи

В этом параграфе рассматриваются две задачи, которые по своему характеру весьма близки к изучавшимся выше. В обеих задачах существенную роль играют последовательности класса $Л_\sigma$.

О поведении уединенных коэффициентов Фурье. Пусть $N = \{n_k\}$ — возрастающая последовательность номеров. Совокупность номеров n, удовлетворяющих условию

$$\lambda^{-1} \leqslant \frac{n}{n_k} \leqslant \lambda \qquad (\lambda > 1) \tag{4.1}$$

для некоторого натурального k, будем называть λ-*окрестностью* последовательности N. Последовательность N назовем *уединенной* для функции $f(x)$, если существует такое $\lambda > 1$, что

$$a_n = 0, \qquad b_n = 0$$

для всех номеров n из λ-окрестности последовательности N, за исключением номеров $n_k \in N$.

С. Сидон [13] доказал следующую теорему.

Теорема Сидона (С). *Пусть $f(x)$ — суммируемая функция, ограниченная сверху. Если последовательность $N \in Л$ является уединенной для функции $f(x)$, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_{n_k}| + |b_{n_k}|) < \infty. \tag{4.2}$$

В этом предложении нельзя полностью отбросить условие, что последовательность N является уединенной. В самом деле, согласно результатам С. Банаха [1] и С. Сидона [11], если N — достаточно редкая последовательность номеров (например, $N \in Л$), то соответствующие последовательности $\{a_{n_k}\}$, $\{b_{n_k}\}$ коэффициентов Фурье непрерывных функций подчинены единственному ограничению

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2) < \infty. \tag{4.3}$$

Отметим, что теорема Сидона (С) является прямым обобщением его теоремы (А), так как если ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_{n_k}\cos n_k x + b_{n_k}\sin n_k x),$$

где $N = \{n_k\} \in Л$, то эта последовательность, очевидно, автоматически будет уединенной для функции $f(x)$.

Здесь мы покажем, что теорема Сидона (С) переносится на уединенные последовательности номеров класса $Л_\sigma$. Дальнейшие обобщения наталкиваются на большие затруднения. Возможно, что другим классам редких последовательностей должны соответствовать свои определения уединенности.

Теорема 3. *Пусть $f(x)$ — суммируемая функция, ограниченная сверху:*

$$f(x) \leqslant M \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi).$$

Если последовательность $N = \{n_k\} \in Л_\sigma$ является уединенной для функции $f(x)$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_{n_k}| + |b_{n_k}|) < \infty.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно положить $a_0 = 0$, так что ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$\mathfrak{S}[f] \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\rho_n\cos(nx - \varphi_n) \qquad (\rho_n \geqslant 0).$$

Зафиксируем $\lambda > 1$ такое, что $\rho_n = 0$ для всех номеров n из λ-окрестности последовательности N, за исключением $n = n_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Без ограничения общности можно считать $\lambda \leqslant 2$. Так как $N \in Л_\sigma$, то согласно замечанию к лемме 1 последовательность N можно представить в форме

$$N = \bigcup_{j=1}^{r} N^{(j)}, \qquad N^{(j)} \in Л(\mu),$$

где μ — любое наперед заданное число, бо́льшее 1. Выберем μ из условий

$$n_p^{(j)} - \sum_{k=1}^{p-1} n_k^{(j)} > \lambda^{-1} n_p^{(j)}, \qquad \sum_{k=1}^{p} n_k^{(j)} < \lambda n_p^{(j)} \tag{4.4}$$
$$(p = 1, 2, \ldots; \quad j = 1, 2, \ldots, r),$$

для чего достаточно положить

$$\mu = \frac{2\lambda - 1}{\lambda - 1} \geqslant 3.$$

Зафиксируем номер p, и пусть

$$n_{p_j}^{(j)} \leqslant n_p < n_{p_j+1}^{(j)}.$$

Воспользуемся леммой 4, положив в ней

$$p = p_j, \quad m = n_k^{(j)}, \quad \alpha_k = \frac{1}{2r}, \quad \varphi_k = \varphi_k^{(j)} = \varphi_{n_k^{(j)}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p_j).$$

Так как $N^{(j)} \in Л(\mu)$, где $\mu \geqslant 3$, то, согласно замечанию, сделанному на с. 6, $N^{(j)} \in \mathfrak{R}(1)$. Таким образом, можно положить $A = 1$, и мы получаем, что существует тригонометрический полином вида

$$T_p^{(j)}(x) = 1 + (2r)^{-1} \sum_{k=1}^{p_j} \cos\bigl(n_k^{(j)} x - \varphi_k^{(j)}\bigr) + \sum_{\nu=0}^{\nu_{p_j}} A_\nu^{(j)} \cos\bigl(\nu x - \psi_\nu^{(j)}\bigr),$$

удовлетворяющий условиям

$$T_p^{(j)}(x) \geqslant 0, \qquad |A_\nu^{(j)}| \leqslant \frac{1}{4r^2},$$

где каждое ν имеет вид

$$\nu = \pm n_{k_1}^{(j)} \pm \ldots \pm n_{k_s}^{(j)} \qquad (0 < k_1 < \ldots < k_s \leqslant p_j).$$

Отметим, что из последнего условия и неравенств (4.4) непосредственно вытекает, что все номера ν находятся в λ-окрестности последовательности N и, в частности, $\nu \neq 0$.

Построим полином

$$T_p(x) = 2r \sum_{j=1}^{r} T_p^{(j)}(x) = 2r^2 + \sum_{k=1}^{p} \cos\left(n_k x - \varphi_{n_k}\right) + \sum_{\nu=1}^{\nu_p} A_\nu \cos\left(\nu x - \psi_\nu\right).$$

Имеем

$$T_p(x) \geqslant 0, \qquad |A_\nu| \leqslant 2r \cdot r \frac{1}{4r^2} = \frac{1}{2} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \nu_p),$$

и снова все номера ν принадлежат λ-окрестности последовательности N. Учитывая, что все коэффициенты Фурье функции $f(x)$ с номерами, принадлежащими этой окрестности и отличными от n_k, обращаются в нуль, получаем

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T_p(x) f(x)\, dx \geqslant \sum_{k=1}^{p} \rho_{n_k} - \sum_{n_k \leqslant \nu_p} |A_{n_k}| \rho_{n_k} \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} \rho_{n_k} - \frac{1}{2} \sum_{n_p < n_k \leqslant \nu_p} \rho_{n_k}.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_p(x)f(x)\,dx \leqslant \frac{M}{\pi}\int_0^{2\pi} T_p(x)\,dx = 4r^2M.$$

Итак,

$$\sum_{k=1}^{p}\rho_{n_k} \leqslant 8r^2M + \sum_{n_p<n_k\leqslant\nu_p}\rho_{n_k}.$$

Но в силу (4.4)

$$\nu_p \leqslant \lambda n_p \leqslant 2n_p.$$

Поэтому в силу леммы 1

$$\sum_{n_p<n_k\leqslant\nu_p}\rho_{n_k} \leqslant \big(N(2n_p)-N(n_p)\big)\,o(1) = o(1).$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{p}\rho_{n_k} \leqslant 8r^2M + o(1), \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\rho_{n_k} \leqslant 8r^2M,$$

и теорема доказана.

Эта теорема является прямым обобщением теоремы Сидона (B).

Наилучшие приближения функций, представимых рядами Фурье с лакунами. Пусть $N=\{n_k\}$ — возрастающая последовательность номеров и $f(x)$ — непрерывная периодическая функция, имеющая ряд Фурье вида

$$\mathfrak{S}[f] \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_{n_k}\cos n_kx + b_{n_k}\sin n_kx); \tag{4.5}$$

через $s_n(x)$ будем обозначать n-ю частичную сумму ряда $\mathfrak{S}[f]$:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n_k\leqslant n}(a_{n_k}\cos n_kx + b_{n_k}\sin n_kx).$$

Положим

$$R_n(f) = \|f(x)-s_n(x)\|,$$
$$E_n(f) = \inf_{t_n}\|f(x)-t_n(x)\| \qquad (n=0,1,2,\dots),$$

где нижняя грань берется по всевозможным тригонометрическим полиномам порядка n. Таким образом, $R_n(f)$ есть приближение функции $f(x)$ ее n-й суммой Фурье, а $E_n(f)$ — наилучшее приближение $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка n.

В работах автора [14, 15] установлено, что если $N\in Л(\lambda)$, то

$$R_n(f) \leqslant C(\lambda)E_n(f) \qquad (n=0,1,2,\dots), \tag{4.6}$$

откуда вытекает, что в этом случае суммы Фурье дают тот же порядок приближения, что и наилучшие полиномы. Здесь я покажу, что этот результат переносится на последовательности $N\in Л_\sigma$.

Теорема 4. *Пусть непрерывная периодическая функция $f(x)$ имеет ряд Фурье вида (4.5), причем $N\in Л_\sigma$. Тогда*

$$R_n(f) \leqslant CE_n(f) \qquad (n=0,1,2,\dots), \tag{4.7}$$

где константа C зависит лишь от последовательности N.

Доказательство. Введем в рассмотрение суммы Валле Пуссена

$$\sigma_{l,n}(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=l-n}^{l} s_k(x).$$

Как хорошо известно (см., например, [16, с. 34]), для любой непрерывной периодической функции $\varphi(x)$

$$\|\varphi - \sigma_{l,n}(\varphi)\| \leqslant 2\,\frac{l+1}{n+1}\,E_{l-n}(\varphi).$$

В частности, если $l = 2n$, то

$$\|\varphi - \sigma_{2n,n}(\varphi)\| \leqslant 2\,\frac{2n+1}{n+1}\,E_n(\varphi) \leqslant 4E_n(\varphi).$$

Применяя эту оценку к заданной функции $f(x)$, получаем, что

$$\|f - s_n\| \leqslant \|f - \sigma_{2n,n}\| + \|\sigma_{2n,n} - s_n\| \leqslant 4E_n(f) + \|\sigma_{2n,n} - s_n\|. \tag{4.8}$$

Но

$$\sigma_{2n,n}(x) - s_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=n+1}^{2n} \bigl(s_\nu(x) - s_n(x)\bigr) =$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{n<n_k\leqslant 2n} (2n+1-n_k)\,\rho_{n_k} \cos(n_k x - \varphi_k),$$

откуда

$$\|\sigma_{2n,n} - s_n\| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{n<n_k\leqslant 2n} (2n+1-n_k)\rho_{n_k} \leqslant \sum_{n<n_k\leqslant 2n} \rho_{n_k}. \tag{4.9}$$

Далее, замечая, что (см., например, [15])

$$\rho_{n_k} \leqslant \frac{4}{\pi}\,E_{n_k-1}(f) \leqslant \frac{4}{\pi}\,E_n(f) \qquad (n < n_k),$$

выводим из (4.8) и (4.9)

$$R_n(f) \leqslant 4E_n(f) + \frac{4}{\pi}\bigl(N(2n) - N(n)\bigr)\,E_n(f).$$

Теперь остается только заметить, что в силу условия $N \in Л_\sigma$

$$N(2n) - N(n) = O(1),$$

откуда

$$R_n(f) = O\bigl(E_n(f)\bigr),$$

и теорема доказана.

Заметим, что так как по теореме Сидона (В)

$$A_n(f) = \sum_{n_k>n} \rho_{n_k} = O\bigl(R_n(f)\bigr)$$

и, кроме того, очевидно,

$$E_n(f) \leqslant A_n(f),$$

то из этой теоремы вытекает такое

С л е д с т в и е. *Пусть непрерывная периодическая функция $f(x)$ имеет ряд Фурье вида* (4.5), *причем $N \in Л_\sigma$. Тогда*

$$E_n(f) \sim R_n(f) \sim A_n(f). \tag{4.10}$$

В заключение получим небольшое уточнение теоремы 2 моей работы [14].

Т е о р е м а 5. *Пусть непрерывная периодическая функция $f(x)$ имеет ряд Фурье вида*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{n_k} \cos(n_k x - \alpha_k) \qquad (\rho_k \geqslant 0), \tag{4.11}$$

где

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \lambda > 3 \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{4.12}$$

Тогда

$$A_n(f) = \sum_{n_k > n} \rho_{n_k} \leqslant \frac{1}{\cos\bigl(\pi/(\lambda-1)\bigr)} E_n(f) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого натурального k и любого целого p положим

$$x_p^{(k)} = \frac{p\pi + \alpha_k}{n_k}. \tag{4.14}$$

Зафиксируем числа k и p и обозначим через $x_{p+2m_1}^{(k+1)}$ ближайшую к $x_p^{(k)}$ точку вида $x_{p+2m}^{(k+1)}$, где m целое. Очевидно, $m_1 = m_1(k,p)$ и

$$\bigl|x_p^{(k)} - x_{p+2m_1}^{(k+1)}\bigr| \leqslant \frac{\pi}{n_{k+1}}.$$

Далее, обозначим через $x_{p+2m_2}^{(k+2)}$ точку вида $x_{p+2m}^{(k+2)}$, ближайшую к $x_{p+2m_1}^{(k+1)}$, и т. д. Таким путем мы получаем последовательность

$$\bigl\{x_{p+2m_l}^{(k+l)}\bigr\} \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots; \quad m_0 = 0),$$

причем числа $m_l = m_l(k,l)$ целые и

$$\bigl|x_{p+2m_l}^{(k+l)} - x_{p+2m_{l+1}}^{(k+l+1)}\bigr| \leqslant \frac{\pi}{n_{k+l+1}} \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.15}$$

Так как в силу (4.12) ряд $\sum n_k^{-1}$ сходится, то существует предел

$$\widetilde{x}_p^{(k)} = \lim_{l \to \infty} x_{p+2m_l}^{(k+l)}.$$

Изучим некоторые свойства чисел $\widetilde{x}_p^{(k)}$. В силу (4.15), имеем

$$\bigl|x_{p+2m_l}^{(k+l)} - \widetilde{x}_p^{(k)}\bigr| \leqslant \sum_{h=l}^{\infty} \bigl|x_{p+2m_h}^{(k+h)} - x_{p+2m_{h+1}}^{(k+h+1)}\bigr| \leqslant \pi \sum_{h=l}^{\infty} \frac{1}{n_{k+h+1}},$$

откуда согласно (4.12)

$$\bigl|x_{p+2m_l}^{(k+l)} - \widetilde{x}_p^{(k)}\bigr| \leqslant \frac{\pi}{n_{k+l+1}} \sum_{h=l}^{\infty} \frac{n_{k+l+1}}{n_{k+h+1}} \leqslant \frac{\pi}{n_{k+l+1}} \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^{-s} = \frac{\pi\lambda}{\lambda-1} \cdot \frac{1}{n_{k+l+1}} \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.16}$$

Покажем, что

$$\widetilde{x}_{p+1}^{(k)} > \widetilde{x}_p^{(k)} \quad \text{и} \quad \widetilde{x}_{2n_k}^{(k)} - \widetilde{x}_1^{(k)} < 2\pi. \tag{4.17}$$

В самом деле, в силу (4.14) и (4.16),

$$\widetilde{x}_{p+1}^{(k)} - \widetilde{x}_p^{(k)} = \big(\widetilde{x}_{p+1}^{(k)} - x_{p+1}^{(k)}\big) - \big(\widetilde{x}_p^{(k)} - x_p^{(k)}\big) + \big(x_{p+1}^{(k)} - x_p^{(k)}\big) \geqslant$$
$$\geqslant -\frac{2\pi\lambda}{\lambda-1}\cdot\frac{1}{n_{k+1}} + \frac{\pi}{n_k} = \frac{\pi}{n_k}\left(1 - \frac{2\lambda}{\lambda-1}\frac{n_k}{n_{k+1}}\right) \geqslant \frac{\pi}{n_k}\left(1 - \frac{2}{\lambda-1}\right) > 0,$$

так как $\lambda > 3$. Аналогично устанавливается и второе неравенство (4.17).

Рассмотрим функцию

$$r_{n_{k-1}}(x) = f(x) - s_{n_{k-1}}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \rho_{n_{k+l}} \cos(n_{k+l}x - \alpha_{k+l}).$$

Имеем

$$\cos\big(n_{k+l}\widetilde{x}_p^{(k)} - \alpha_{k+l}\big) = \cos\big\{n_{k+l}\big(\widetilde{x}_p^{(k)} - x_{p+2m_l}^{(k+l)}\big) + n_{k+l}x_{p+2m_l}^{(k+l)} - \alpha_{k+l}\big\} =$$
$$= \cos\big\{n_{k+l}\big(\widetilde{x}_p^{(k)} - x_{p+2m_l}^{(k+l)}\big) + (2m_l + p)\,\pi\big\} = (-1)^p \cos n_{k+l}\big(\widetilde{x}_p^{(k)} - x_{p+2m_l}^{(k+l)}\big),$$

откуда в силу (4.16)

$$(-1)^p \cos\big(n_{k+l}\widetilde{x}_p^{(k)} - \alpha_{k+l}\big) \geqslant \cos\frac{\pi\lambda n_{k+l}}{(\lambda-1)\,n_{k+l+1}} \geqslant \cos\frac{\pi}{\lambda-1} \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots).$$

Используя эту оценку, выводим, что

$$(-1)^p r_{n_{k-1}}\big(\widetilde{x}_p^{(k)}\big) \geqslant \cos\frac{\pi}{\lambda-1}\sum_{l=0}^{\infty}\rho_{n_{k+l}} = \cos\frac{\pi}{\lambda-1}\,A_{n_{k-1}}(f). \tag{4.18}$$

Таким образом, в силу (4.17) и (4.18) функция $r_{n_{k-1}}(x)$ принимает в $2n_k$ последовательных точках $\widetilde{x}_p^{(k)}$ $(p = 1, 2, \ldots, 2n_k)$ одного периода с чередующимися знаками значения, по абсолютной величине не меньшие, чем

$$\cos\frac{\pi}{\lambda-1}A_{n_{k-1}}(f).$$

Применяя теорему Валле Пуссена [16], выводим отсюда, что

$$E_n(r_{n_{k-1}}) = E_n(f) \geqslant \cos\frac{\pi}{\lambda-1}A_{n_{k-1}}(f) = \cos\frac{\pi}{\lambda-1}A_n(f) \qquad (n_{k-1} \leqslant n < n_{k+1}).$$

Итак,

$$A_n(f) \leqslant \frac{1}{\cos\big(\pi/(\lambda-1)\big)}\,E_n(f) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

и теорема доказана.

Отметим несколько следствий.

Следствие 1. *Пусть непрерывная периодическая функция $f(x)$ имеет ряд Фурье вида*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\rho_{n_k}\cos(n_k x - \alpha_k) \qquad (\rho_{n_k} \geqslant 0),$$

где

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \lambda > 3 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_{n_k} \leqslant \frac{1}{\cos\bigl(\pi/(\lambda-1)\bigr)} \max_x |f(x)|. \tag{4.19}$$

Для вывода этого следствия достаточно положить в теореме 5 $n = 0$.

Следствие 2. *Пусть выполняются все условия теоремы* 5. *Тогда*

$$\cos\frac{\pi}{\lambda-1} A_n(f) \leqslant E_n(f) \leqslant R_n(f) \leqslant A_n(f) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.20}$$

Сопоставляем теорему 5 с очевидными неравенствами

$$E_n(f) \leqslant R_n(f) \leqslant A_n(f) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Следствие 3. *Пусть непрерывная периодическая функция* $f(x)$ *имеет ряд Фурье вида* (4.11), *где*

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} = q_k \to \infty \qquad (k \to \infty). \tag{4.21}$$

Тогда

$$E_n(f) \approx R_n(f) \approx A_n(f) \qquad (n \to \infty). \tag{4.22}$$

Применяем теорему 5 к $r_{n_{k-1}}(x)$. Это следствие совпадает с упомянутой выше теоремой 2 из работы [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Banach S.* Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen // Studia Math. 1930. № 2. 207–220, 251.
2. *Fatou P.* Séries trigonométriques et séries de Taylor // Acta Math. 1906. V. 30. P. 335–400.
3. *Littlewood J.E.* A Theorem on power series // Proc. London Math. Soc. (2). 1924. V. 23. P. 94–103.
4. *Лузин Н.Н.* Интеграл и тригонометрический ряд. — М.—Л., 1951.
5. *Paley R.E.A.C., Zygmund A.* On some series of functions // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1930. V. 26. P. 337–357.
6. *Riesz F.* Über die Fourier-Koeffizienten stetiger Funktionen von beschränkter Schwankung // Math. Zeitschr. 1918. B. 2. S. 312–315.
7. *Salem R.* Sur les proptiétés extrémales de certaines polynomes trigonométriques // C. R. 1933. V. 196. P. 1776–1778.
8. *Salem R.* Essais sur les séries trigonométriques // Act. Sc. et Industr. Paris. 1940. № 862.
9. *Sidon S.* Ein Satz über die absolute Konvergenz von Fourier-Reihen, in denen sehr viele Glieder fehlen // Math. Ann. 1926. V. 96. P. 418–419.
10. *Sidon S.* Verallgemeinerung eines Satzes über die absolute Konvergenz von Fourier-Reihen mit Lücken // Math. Ann. 1927. V. 97. P. 675–676.
11. *Sidon S.* Ein Satz über trigonometrische Polynome und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen // Math. Ann. 1932. V. 106. P. 536–539.
12. *Sidon S.* Bemerkungen über Fourier- und Potenzreihen // Acta Szeged. 1934. V. 7. P. 85–94.
13. *Sidon S.* Über orthogonale Entwicklungen // Acta Szeged. 1943. V. 10. P. 206–253.
14. *Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения функций, представимых лакунарными тригонометрическими рядами // Докл. АН СССР. 1951. Т. 76. С. 33–36.
15. *Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения функции, представимых лакунарными тригонометрическими рядами // Успехи матем. наук. 1952. Т. 7, вып. 1(47). С. 147–149.
16. *de la Vallée Poussin Ch.J.* Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réele, proféssées à la Sorbonne. — Paris, 1919.
17. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. — М.—Л., 1939.

18. *Zygmund A.* Quelques théorèmes sur les séries trigonométriques et celles de puissances // Studia Math. 1931. V. 3. P. 77–91.