ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ [*)]

1. Одна из основных задач, относящихся к проблеме абсолютной сходимости ортогональных рядов, состоит в следующем. Пусть $\Phi \equiv \{\varphi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ есть ортонормированный базис гильбертова пространства L_2, $f \in L_2$ и [1)]

$$f = \sum c_n \varphi_n = \sum (f, \varphi_n)\, \varphi_n \tag{1}$$

разложение элемента f в ортогональный ряд по системе Φ. Требуется исследовать, при каких ограничениях на элемент f сходится ряд

$$\sum |c_n|. \tag{2}$$

Положим $s_0 = \theta$ (где θ — нулевой элемент пространства L_2),

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \varphi_k, \quad E_n(f, \Phi)_{L_2} = \|f - s_{n-1}\|_{L_2} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2 \right\}^{1/2} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

так что $E_n(f, \Phi)_{L_2}$ есть наилучшее приближение элемента f посредством полиномов

$$\Phi_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} d_k\, \varphi_k$$

порядка $n-1$ по системе Φ. В моей работе [1, 2] доказана такая теорема.

I. *Для сходимости ряда* (2) *достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}\, E_n(f, \Phi)_{L_2}. \tag{3}$$

В настоящей работе дается в известном смысле полное решение поставленной задачи.

2. Сходимость или расходимость ряда (2) не зависит от порядка его членов, т.е. от порядка следования элементов системы Φ. Поэтому и естественные условия сходимости ряда (2) должны обладать этой же инвариантностью. В связи с этим мы введем одно новое понятие. Рассмотрим всевозможные n-членные полиномы по системе Φ

$$\Phi_{(n)} = \sum_{i=1}^{n} d_{k_i}\, \varphi_{k_i} \qquad (\Phi_{(0)} = \theta),$$

где номера $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ могут быть совершенно произвольными, и положим

$$e_n(f, \Phi)_{L_2} = \inf_{\Phi_{(n-1)}} \|f - \Phi_{(n-1)}\|_{L_2} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Числа $e_n(f, \Phi)_{L_2}$ естественно называть наилучшими квадратическими приближениями элемента f посредством $(n-1)$-членных полиномов по системе Φ. Очевидно, они обладают требуемой инвариантностью.

---

*) Докл. АН СССР. 1955. Т. 102, № 1. С. 37–40.

1) Здесь и в дальнейшем суммирование с неуказанными пределами производится от 1 до ∞.

Нижняя грань в формуле (4) всегда достигается для некоторого полинома $\Phi^*_{(n-1)}$ (не обязательно единственного) и

$$e_n(f,\Phi)_{L_2} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 - \sum_{i=1}^{n-1} c_{k_i}^2 \right\}^{1/2}, \tag{5}$$

где коэффициенты c_{k_i} выбираются из условия

$$|c_k| \leqslant |c_{k_i}| \qquad (k \neq k_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{6}$$

Хотя это условие и не всегда однозначно определяет номера $\{k_i\}$ $(i = 1, 2 \ldots \ldots, n-1)$, оно полностью определяет значение $e_n(f,\Phi)_{L_2}$. Очевидно, всегда

$$e_n(f,\Phi)_{L_2} \leqslant E_n(f,\Phi)_{L_2} \qquad (n = 1, 2 \ldots), \tag{7}$$

и равенства

$$e_n(f,\Phi)_{L_2} = E_n(f,\Phi)_{L_2} \qquad (n = 1, 2 \ldots)$$

имеют место в том и только том случае, если $|c_n| \downarrow 0$ [2]. Из этого замечания непосредственно вытекает, что

$$e_n(f,\Phi)_{L_2} = E_n(f,\widetilde{\Phi})_{L_2} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

где система $\widetilde{\Phi}$ получается из системы Φ такой перестановкой, что $f = \sum \widetilde{c}_n \, \widetilde{\varphi}_n$ и $|\widetilde{c}_n| \downarrow 0$.

3. Основная теорема. *Для того чтобы сходился ряд* (2), *необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \, e_n(f,\Phi)_{L_2}. \tag{9}$$

Наметим доказательство этой теоремы. Мы опираемся на следующую лемму о числовых рядах.

Лемма 1. *Пусть* $u_n \not\equiv 0$, $u_n \downarrow 0$, $\sum u_n < \infty$ *и* $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$. *Тогда*

$$\frac{1}{2} \sum \sqrt{\frac{r_n}{n}} \leqslant \sum \sqrt{u_n} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \sum \sqrt{\frac{r_n}{n}}. \tag{10}$$

Второе из этих неравенств известно (см. [1; 2, лемму 3], а также [3, теорему 345], где, впрочем, константа несколько хуже $(\sqrt{2})$.) Я предполагаю, что наилучшая константа в первом неравенстве равна $2/\pi$, но мне не удалось это доказать.

Полагая в лемме 1 $u_n = c_n^2$, получаем

II. *Пусть* $|c_n| \downarrow 0$. *Тогда ряды* (2) *и* (3) *сходятся и расходятся одновременно*; *точнее*:

$$\frac{1}{2} \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \, E_n(f,\Phi)_{L_2} \leqslant \sum |c_n| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \, E_n(f,\Phi)_{L_2}. \tag{11}$$

Это предложение представляет самостоятельный интерес и имеет простую геометрическую интерпретацию. В гильбертовом пространстве L_2 зафиксируем орты $\{\varphi_n\}$ и построим единичную сферу S_{L_2} $(\sum c_n^2 = 1)$, а также единичную сферу S_A $(\sum |c_n| = 1)$ пространства A, для которого $\|f\|_A = \sum |c_n|$. S_A представляет собой поверхность бесконечного "октаэдра", вписанного в сферу S_{L_2}.

---

[2] Как обычно, запись $a_n \downarrow 0$ означает, что $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots$ и $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Теорема II утверждает, что если рассмотреть поверхность

$$P\ \left(\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2}=1\right),$$

то на тех участках S_A, для которых выполняются условия $|c_n|\downarrow 0$, эта поверхность достаточно хорошо аппроксимирует S_A. Точнее, если $f\in P$ и $|c_n|\downarrow 0$, то $1/2\leqslant \|f\|_A\leqslant 2/\sqrt{3}$.

Для завершения доказательства основной теоремы остается расположить члены ряда (1) в порядке убывания модулей их коэффициентов и воспользоваться теоремой II. Поверхность

$$Q\ \left(\sum\frac{1}{\sqrt{n}}\,e_n(f,\Phi)_{L_2}=1\right)$$

склеивается из кусков поверхностей P, построенных при соответствующей перенумерации ортов, и аппроксимирует уже всю сферу S_A.

4. Укажем несколько приложений основной теоремы. Прежде всего, учитывая (7), сразу получаем теорему I. Аналогично убеждаемся в справедливости следующего предложения (ср. [1, 2], теорема 3).

III. *Пусть $N=\{n_k\}$ — возрастающая последовательность номеров. Тогда*

$$\sum|c_{n_k}|\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\sum\frac{1}{\sqrt{k}}\,E_{n_k}(f,\Phi)_{L_2}. \tag{12}$$

Сфера S_A определена лишь для тех направлений λf, для которых существует последовательность $\mu_n\to\infty$ такая, что

$$\sum\mu_n^{-2}<\infty,\qquad \sum(\mu_n\,c_n)^2<\infty; \tag{13}$$

последнее из этих условий означает, что $f_\mu=\sum\mu_n\,c_n\,\varphi_n\in L_2$. Наши методы позволяют полностью охарактеризовать ту часть сферы S_A, которая аппроксимируется поверхностью P.

IV. *Для того чтобы сходимость ряда* (2) *влекла сходимость ряда* (3), *необходимо и достаточно, чтобы существовала монотонная последовательность $\mu_n\to\infty$, удовлетворяющая условиям* (13).

Пусть теперь $\Phi\equiv\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная система функций на некотором отрезке $[a,b]$ с суммируемым и почти всюду положительным весом $p(x)$. Для ортогональных рядов по таким системам справедлива теорема

V. *Если сходится ряд* (9) (*или ряд* (2)), *то ряд* (1) *абсолютно сходится для почти всех $x\in[a,b]$.*

См. также [4], где указаны условия на систему Φ, при выполнении которых справедливо обратное предложение, т.е. из абсолютной сходимости ряда (1) почти всюду вытекает сходимость ряда (2).

Переходим к рассмотрению абсолютной сходимости рядов Фурье по тригонометрической системе T. Итак, пусть $f(x)\in L_2[0,2\pi]$,

$$\mathfrak{S}[f]\equiv\sum\rho_n\,\cos(nx-\alpha_n)\qquad(\rho_n\geqslant 0)$$

— ряд Фурье и $\omega(\delta,f)_{L_2}$ — квадратический модуль непрерывности функции $f(x)$. Известно (см. [1, 2] или [5]), что всегда

$$\sum\rho_n\leqslant CR,\quad\text{где}\quad R=\sum\frac{1}{\sqrt{n}}\,\omega\left(\frac{1}{n},f\right)_{L_2}. \tag{14}$$

Здесь мы укажем два результата противоположного характера.

VI. *Пусть* $f(x) \in L_2[0, 2\pi]$ *и* $\rho_n \downarrow 0$. *Для того чтобы сходился ряд* $\sum \rho_n$, *необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд* R.

VII. *Пусть* $f(x) \in L_2[0, 2\pi]$. *Для того чтобы ряды* $\sum \rho_n$ *и* R *сходились и расходились одновременно, необходимо и достаточно, чтобы существовала монотонная последовательность* $\mu_n \to \infty$, *для которой*

$$\sum \mu_n^{-2} < \infty, \qquad \sum (\mu_n \, \rho_n)^2 < \infty.$$

Последняя теорема полностью характеризует ту область, где поверхность $R = 1$ аппроксимирует сферу S_A.

Использование в нашей задаче приближений в метрике L_2, по-видимому, неизбежно. Условие

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \, e_n(f, T)_C < \infty,$$

где приближения берутся в метрике пространства C непрерывных функций, уже не является необходимым для сходимости ряда $\sum \rho_n$.

5. В заключение укажем на некоторые возможные обобщения. Все результаты этой работы переносятся на комплексное гильбертово пространство. Далее, совершенно аналогично рассматривается вопрос о сходимости рядов

$$\sum |c_n|^p \quad (0 < p < 2), \qquad \sum F(|c_n|),$$

где $F(\sqrt{u})$ — вогнутая функция, удовлетворяющая некоторым дополнительным условиям. Наконец, можно предполагать, что Φ не ортонормированный базис, а так называемый базис Фишера—Рисса (по поводу этого понятия см. [6–8]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стечкин С.Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Матем. сб. 1951. Т. 29, № 71(1). С. 225–232.
2. *Stečkin S.B.* On absolute convergence of orthogonal series // Am. Math. Soc. Transl. 1953. V. 89.
3. *Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. — М.: ИЛ, 1948.
4. *Kaczmarz S., Steinhaus H.* Theorie der Orthogonalreihen. — Warszava—Lwów, 1935.
5. *Szasz O.* Fourier series and mean moduli of continuity // Trans. Am. Math. Soc. 1937. V. 42, № 3. P. 366–395.
6. *Бари Н.К.* О базисах в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. 1946. Т. 54, № 5. С. 383–386.
7. *Бари Н.К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Уч. зап. МГУ. 1951. В. 148. Т. 4. С. 69–106.
8. *Гельфанд И.М.* Замечание к работе Н.К. Бари "Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве" // Уч. зап. МГУ. 1951. В. 148. Т. 4. С. 224–225.