ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ

(ВТОРОЕ СООБЩЕНИЕ) [*)]

Введение

Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция, $\widetilde{f}(x)$ — тригонометрически сопряженная с ней функция. Если ряд Фурье функции $f(x)$

$$\mathfrak{S}[f] \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

абсолютно сходится, т.е.

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(|a_n| + |b_n|\big) < \infty,$$

то будем писать $f(x) \in A$; в противном случае будем писать $f(x) \notin A$. Через $\mathfrak{M}$ будем обозначать некоторый (фиксированный) класс непрерывных периодических функций.

Обычно задача исследования абсолютной сходимости рядов Фурье рассматривается в следующей постановке (см., например, [4] или [13] [1)]).

Задача 1. Существует ли функция $f(x)$, для которой $f(x) \in \mathfrak{M}$, $f(x) \notin A$?

Если ответ на этот вопрос положителен, то имеет смысл поставить несколько дальнейших задач.

Задача 2. Существует ли функция $f(x)$, для которой $f(x) \in \mathfrak{M}$, $\widetilde{f}(x) \in \mathfrak{M}$ и $f(x) \notin A$?

Задача 3. Существует ли функция $f(x) \in \mathfrak{M}$ такая, что ряды Фурье $\mathfrak{S}[f]$ и $\mathfrak{S}[\widetilde{f}]$ не имеют ни одной точки абсолютной сходимости?

Задача 4. Существует ли функция $f(x)$, для которой $f(x) \in \mathfrak{M}$, $\widetilde{f}(x) \in \mathfrak{M}$ и такая, что ряды Фурье $\mathfrak{S}[f]$ и $\mathfrak{S}[\widetilde{f}]$ не имеют ни одной точки абсолютной сходимости?

Из того, что для фиксированного класса $\mathfrak{M}$ задача 1 решается положительно, еще не вытекает такое же решение задачи 2. Например, если $\mathfrak{M}$ есть класс $\mathfrak{U}$ абсолютно непрерывных функций, то, как хорошо известно,

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{n \ln n} \in \mathfrak{U},$$

и, следовательно, задача 1 решается положительно. С другой стороны, согласно одной теореме Харди и Литтлвуда (см. [19, 20], а также [16, 7]) условия $f(x) \in \mathfrak{U}$, $\widetilde{f}(x) \in \mathfrak{U}$ влекут $f(x) \in A$, т.е. задача 2 решается для класса $\mathfrak{U}$ отрицательно.

В этой работе устанавливается, что для некоторых классов $\mathfrak{M}$, встречающихся при исследовании абсолютной сходимости рядов Фурье, не только задача 1 решается положительно, но также имеется положительное решение задач 2 и 4.

---

*) Изв. АН СССР. Сер. матем. 1955. Т. 19. С. 221–246.

1) В дальнейшем эта работа цитируется как (I).

Тем самым достигается усиление известных примеров не абсолютно сходящихся рядов Фурье. При этом задачи 2 и 4 рассматриваются нами не в терминах пар сопряженных рядов Фурье, а в эквивалентных им терминах рядов Тейлора.

В § 1 исследуется задача 2 для классов $\mathfrak{M}$, определяемых условиями

$$E_n^*(f) = O(G_n),$$

где $E_n^*(f)$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ посредством тригонометрических полиномов порядка $n-1$, а $\{G_n\}$ — заданная невозрастающая последовательность положительных чисел. При построении примеров § 1 употребляется конструкция, впервые указанная С.Н. Бернштейном [4].

В § 2 рассматривается задача 2 для классов $\mathfrak{M}$, определяемых условиями

$$\omega_k(\delta, f) = O\big(\omega(\delta)\big) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi),$$

где $\omega_k(\delta, f)$ — модуль непрерывности k-го порядка функции $f(x)$, а $\omega(\delta)$ — заданная положительная функция. Некоторые результаты этого параграфа являются новыми даже в постановке задачи 1.

§ 3 посвящен исследованию задачи 4 для тех же классов $\mathfrak{M}$. При выводе основных теорем этого параграфа используются результаты § 1 и § 2.

Выражаю благодарность Н.К. Бари за постоянный интерес к моей работе и постановку задачи, рассматриваемой в § 3, а также А.Г. Постникову, который указал мне необычайно простое доказательство леммы 2.

§ 1. Об абсолютной сходимости рядов Тейлора

1.1. Постановка задачи. Из результатов С.Н. Бернштейна [4] (см. также (I), введение) вытекает справедливость следующего предложения.

Теорема I. *Пусть $G_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $G_n \downarrow 0$. Для того чтобы соотношения*

$$E_n^*(f) = O(G_n) \tag{1.1}$$

влекли $f(x) \in A$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\, G_n. \tag{1.2}$$

Рассмотрим функцию

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n, \tag{1.3}$$

регулярную в круге $|z| < 1$ и непрерывную в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$. Обозначим через $E_n(F)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ее наилучшие приближения в круге $|z| \leqslant 1$ посредством многочленов $p_{n-1}(z)$ степени $n-1$:

$$E_n(F) = \inf_{p_{n-1}} \big\| F(z) - p_{n-1}(z) \big\| = \inf_{p_{n-1}} \max_{|z| \leqslant 1} \big| F(z) - p_{n-1}(z) \big|.$$

Если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$$

сходится, то будем писать $F(z) \in A$.

Зададим последовательность $\{G_n\}$, удовлетворяющую условиям

$$G_n > 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \qquad G_n \downarrow 0,$$

и рассмотрим класс функций $F(z)$, для которых

$$E_n(F) = O(G_n). \tag{1.4}$$

Останется ли теорема I справедливой, если в ее формулировке заменить условие (1.1) условием (1.4)? Как хорошо известно, из соотношений (1.1), вообще говоря, не вытекает, что и сопряженная функция $\widetilde{f}(x)$ удовлетворяет аналогичным условиям

$$E_n^*(\widetilde{f}\,) = O(G_n).$$

Поэтому возможность указанной замены не является непосредственным следствием из теоремы I. Тем не менее мы покажем, что такая замена все-таки возможна. Для этого мы воспользуемся решением одной экстремальной задачи для обыкновенных многочленов, которая рассматривается в п. 1.2. Отметим, что как основной результат этого параграфа, так и употребляемая для его доказательства конструкция будут использованы в дальнейших разделах работы.

1.2. Одна экстремальная задача. Рассмотрим всевозможные многочлены вида

$$p_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} e^{2\pi i \beta_\nu} z^\nu \qquad (n = 0, 1, 2, \dots; \quad 0 \leqslant \beta_\nu < 1) \tag{1.5}$$

и положим

$$M_n = \inf_{\beta_\nu} \bigl\| p_n(z) \bigr\| \qquad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{1.6}$$

где, как и выше,

$$\bigl\| p_n(z) \bigr\| = \max_{|z| \leqslant 1} \bigl| p_n(z) \bigr| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \bigl| p_n(e^{2\pi i x}) \bigr|.$$

Здесь будет показано, что [2)]

$$M_n \sim \sqrt{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{1.7}$$

Оценка M_n снизу не представляет труда. По неравенству Парсеваля имеем

$$\int_0^1 \bigl| p_n(e^{2\pi i x}) \bigr|^2 \, dx = n + 1,$$

откуда

$$\bigl\| p_n(z) \bigr\| \geqslant \left(\int_0^1 \bigl| p_n(e^{2\pi i x}) \bigr|^2 \, dx \right)^{1/2} = \sqrt{n+1}$$

и, следовательно,

$$M_n \geqslant \sqrt{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{1.8}$$

Оценка M_n сверху непосредственно вытекает из известных результатов Харди и Литтлвуда. Именно, Харди и Литтлвуд [17] показали, что если иррациональность μ разлагается в непрерывную дробь с ограниченными неполными частными (например, $\mu = \sqrt{2}\,$), то многочлены

$$p_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} e^{2\pi i \mu \nu^2} z^\nu \tag{1.9}$$

[2)] Запись $A_n \sim B_n$ означает, что найдутся положительные константы C_1 и C_2, для которых $C_1 B_n \leqslant A_n \leqslant C_2 B_n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$.

удовлетворяют условию

$$\|p_n(z)\| \leqslant C_3\sqrt{n+1} \qquad (n=0,1,2,\ldots). \tag{1.10}$$

Кроме того, Харди и Литтлвуд [18] доказали, что если $\alpha \neq 0$ и

$$p_n(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} e^{2\pi i\alpha\nu\,\ln\nu} z^{\nu}, \tag{1.11}$$

то снова выполняется условие (1.10). Каждый из этих примеров показывает, что

$$M_n \leqslant C_3\sqrt{n+1} \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

откуда в связи с (1.8) вытекает (1.7).

Мы дадим здесь еще один, более простой пример последовательности многочленов вида (1.5), удовлетворяющих условиям (1.10). Для этого нам понадобится одна лемма о тригонометрических суммах, установленная Р.О. Кузьминым [8] (см. также [22] и [23], где приведено весьма простое доказательство, и [21]).

Лемма 1. *Пусть $g(\nu)$ — действительная функция, удовлетворяющая условиям*

$$0<\theta \leqslant g(1)-g(0) \leqslant g(2)-g(1) \leqslant \ldots \leqslant g(n)-g(n-1) \leqslant 1-\theta, \tag{1.12}$$

где $0<\theta\leqslant 1/2$. Тогда

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} e^{2\pi i\,g(\nu)}\right| < \frac{1}{\theta}\,. \tag{1.13}$$

Эта лемма может с успехом применяться для оценки тригонометрических сумм в тех случаях, где обычно пользуются леммами Ван дер Корпута [15] (см. также [7, § 5.3]). Отметим, что изменение значений функции $g(\nu)$ на целые числа, очевидно, не влияет на величину тригонометрической суммы

$$\sum_{\nu=0}^{n} e^{2\pi i\,g(\nu)};$$

поэтому лемма 1 справедлива также, если

$$p+\theta \leqslant g(1)-g(0) \leqslant g(2)-g(1) \leqslant \ldots \leqslant g(n)-g(n-1) \leqslant p+1-\theta, \tag{1.14}$$

где $0<\theta\leqslant 1/2$, а p — произвольное целое число.

Лемма 2. *Пусть $a=1$ или $a=2$ и $0\leqslant m\leqslant n\leqslant N$. Тогда*

$$\sum_{\nu=m}^{n} e^{ai\left(\nu^2/N+\nu x\right)} = O\big(\sqrt{N+1}\big) \qquad (N=0,1,2,\ldots) \tag{1.15}$$

равномерно относительно m, n и относительно $x\in[0,2\pi]$.

Доказательство. Воспользуемся леммой 1. Имеем

$$g(\nu) = \frac{a}{2\pi}\left(\frac{\nu^2}{N}+\nu x\right), \qquad g(\nu)-g(\nu-1) = \frac{a}{2\pi}\left(\frac{2\nu-1}{N}+x\right).$$

Таким образом, разности $h_\nu = g(\nu)-g(\nu-1)$ монотонно возрастают вместе с ν и соседние точки h_ν находятся друг от друга на расстоянии $a/(\pi N)$. Отрезок $\Delta=[h_{m+1},h_n]$ имеет длину

$$\frac{a}{\pi}\,\frac{n-m-1}{N} < \frac{a}{\pi} \leqslant \frac{2}{\pi}\,.$$

Поэтому при $N \geqslant N_0$ имеется не более одной целой точки p, принадлежащей отрезку Δ или отстоящей от него на расстояние, не превосходящее $1/(2\sqrt{N})$.

Пусть $N \geqslant N_0$ и неравенство $|p-h_\nu| \leqslant 1/(2\sqrt{N})$ выполняется для $n_1 \leqslant \nu \leqslant n_2$ $(m+1 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant n)$. Представим сумму (1.15) в форме

$$\sum_{\nu=m}^{n} e^{ai(\nu^2/N+\nu x)} = \sum_{\nu=m}^{n_1-1} + \sum_{\nu=n_1}^{n_2} + \sum_{\nu=n_2+1}^{n} = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3$$

(каждая из сумм $\sum_j$ может случайно оказаться пустой). Тогда сумма $\sum_2$ содержит более $O(\frac{1}{\sqrt{N}} \cdot N) = O(\sqrt{N})$ членов, откуда

$$\sum\nolimits_2 = O(\sqrt{N}\,).$$

Применяя к суммам $\sum_1$ и $\sum_3$ лемму 1 с $\theta = 1/(2\sqrt{N})$, получаем, что

$$\sum\nolimits_1 = O(\sqrt{N}\,), \qquad \sum\nolimits_3 = O(\sqrt{N}\,).$$

Отсюда

$$\sum_{\nu=m}^{n} e^{ai\left(\frac{\nu^2}{N}+\nu x\right)} = O\big(\sqrt{N}\,\big) \qquad (N \geqslant N_0)$$

равномерно относительно m, n и относительно x. Так как оценка (1.15), очевидно, справедлива также для $N < N_0$, то лемма 2 доказана.

Из этой леммы непосредственно вытекает, что многочлены

$$p_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} e^{i\nu^2/n} z^\nu \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.16}$$

удовлетворяют условию (1.10), откуда, как и выше, следует (1.7).

Заметим, что формула (1.7) позволяет определить порядок роста верхней грани

$$T_n = \sup_{\|p_n\| \leqslant 1} \sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu|,$$

распространенной на многочлены $p_n(z)$ вида[3)]

$$p_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu\, z^\nu.$$

В самом деле, с одной стороны,

$$\sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu| \leqslant \sqrt{(n+1)\sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu|^2} \leqslant \sqrt{n+1}\,\big\|p_n(z)\big\|,$$

откуда

$$T_n \leqslant \sqrt{n+1}.$$

С другой стороны, полагая

$$p_n(z) = \frac{\widehat{p}_n(z)}{C_3\sqrt{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

[3)] Аналогичная задача для тригонометрических полиномов рассматривалась ранее С.Н. Бернштейном (см. [1–3, 6]).

где многочлены $\widehat{p}_n(z)$ имеют вид (1.15) и удовлетворяют условию (1.10), будем иметь

$$\|p_n(z)\| \leqslant 1, \qquad \sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu| \geqslant \frac{n+1}{C_3\sqrt{n+1}} = C_4\sqrt{n+1}\,,$$

откуда

$$T_n \geqslant C_4\sqrt{n+1}\,.$$

Окончательно

$$T_n \sim \sqrt{n+1}\,. \tag{1.17}$$

Впрочем, этот результат в дальнейшем не используется.

1.3. Аналог теоремы I.

Теорема 1. *Пусть $G_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $G_n \downarrow 0$. Для того чтобы соотношения*

$$E_n(F) = O(G_n) \tag{1.18}$$

влекли $F(z) \in A$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\, G_n. \tag{1.19}$$

Доказательство. Пусть $f(x) = \operatorname{Re} F(e^{ix})$ [4]. Так как

$$E_n^*(f) \leqslant E_n(F) = O(G_n),$$

то сходимость ряда (1.19) влечет сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\, E_n^*(f),$$

откуда в силу теоремы I $f(x) \in A$ и, следовательно, $F(z) \in A$. Тем самым достаточность условий теоремы установлена.

Для доказательства их необходимости допустим, что ряд (1.19) расходится, и построим функцию $F_1(z) \notin A$, для которой выполняются соотношения (1.18). Согласно лемме 2 многочлены

$$P_k(z) = \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} e^{i2^{-k}n^2} z^n = \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} D_n\, z^n \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

удовлетворяют условию

$$\|P_k(z)\| \leqslant C_5\, 2^{k/2} \qquad (k = 1, 2, \ldots); \tag{1.20}$$

кроме того, очевидно,

$$\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} |D_n| = 2^{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{1.21}$$

Зададим произвольно последовательность $\{G_n\}$ с расходящимся рядом (1.19) и положим

$$F_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k\, P_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} e^{i2^{-k}n^2} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n. \tag{1.22}$$

---

[4] Если $w = u + iv$, где u и v действительны, то $\operatorname{Re} w = u$, $\operatorname{Im} w = v$.

где

$$u_k = 2^{-k/2}(G_{2^k} - G_{2^{k+1}}).$$

Покажем, что $F_1(z) \notin A$ и что для этой функции выполняются соотношения (1.18). Полагая

$$s_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu,$$

получаем в силу (1.20)

$$E_{2^{k-1}}(F_1) \leqslant \|F_1(z) - s_{2^{k-1}-1}(z)\| = \left\|\sum_{\varkappa=k}^{\infty} u_\varkappa P_\varkappa(z)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\varkappa=k}^{\infty} u_\varkappa \|P_\varkappa(z)\| \leqslant C_5 \sum_{\varkappa=k}^{\infty} 2^{\varkappa/2} u_\varkappa = C_5 \sum_{\varkappa=k}^{\infty} (G_{2^k} - G_{2^{k+1}}) = C_5 G_{2^k}.$$

Отсюда ввиду монотонности последовательностей $\{E_n(F_1)\}$ и $\{G_n\}$

$$E_n(F_1) \leqslant E_{2^{k-1}}(F_1) \leqslant C_5 G_{2^k} \leqslant C_5 G_n \qquad (2^{k-1} \leqslant n \leqslant 2^k, \quad k = 1, 2, \ldots),$$

т.е.

$$E_n(F_1) = O(G_n).$$

Остается показать, что ряд $\sum |c_n|$ расходится. Имеем согласно (1.21)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} |D_n| = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} u_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k/2} (G_{2^k} - G_{2^{k+1}}).$$

Допустим, что этот ряд сходится. Тогда

$$\sum_{\varkappa=k}^{\infty} 2^{\varkappa/2} (G_{2^\varkappa} - G_{2^{\varkappa+1}}) \geqslant 2^{k/2} \sum_{\varkappa=k}^{\infty} (G_{2^\varkappa} - G_{2^{\varkappa+1}}) = 2^{k/2} G_{2^k},$$

откуда

$$2^{k/2} G_{2^k} = o(1).$$

В силу этой оценки законно преобразование Абеля, и мы получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k/2} (G_{2^k} - G_{2^{k+1}}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2^{1/2} G_2 + \left(1 - 2^{-1/2}\right) \sum_{k=2}^{\infty} 2^{k/2} G_{2^k}\right) \geqslant C_6 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k/2} G_{2^k}. \quad (1.23)$$

Но согласно теореме Коши из расходимости ряда (1.19) вытекает расходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k/2} G_{2^k}.$$

Отсюда и из (1.23) $\sum |c_n| = \infty$. Таким образом, предположение о сходимости ряда $\sum |c_n|$ ведет к противоречию и, следовательно, $\sum |c_n| = \infty$. Теорема доказана.

1.4. Замечания. Для доказательства второй половины теоремы 1 мы могли бы вместо многочленов $P_k(z)$ воспользоваться любой другой последовательностью многочленов, обладающих аналогичными свойствами. В частности, такие многочлены можно построить на основе примеров Харди и Литтлвуда (см. (1.9) и (1.11)); однако это не дало бы в данном случае никаких упрощений доказательства.

В качестве непосредственного следствия из теоремы 1 вытекает решение сформулированной во введении задачи 2 для класса $\mathfrak{M}$ непрерывных периодических функций $f(x)$, удовлетворяющих условию (1.1).

Пусть $G_n > 0$, $G_n \downarrow 0$; *для того чтобы существовала функция* $f(x) \notin A$ *такая, что*

$$E_n^*(f) = O(G_n), \qquad E_n^*(\widetilde{f}\,) = O(G_n),$$

необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд (1.19).

Чтобы убедиться в этом, достаточно положить

$$f(x) = \operatorname{Re} F_1(e^{ix}),$$

где $F_1(z)$ — функция, построенная в доказательстве теоремы 1.

Результаты пп. 1.2–1.3 позволяют весьма просто рассмотреть следующую сходную задачу. Пусть

$$R_n(F) = \big\| F(z) - s_{n-1}(z) \big\| \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1.24}$$

где $s_n(z)$ — n-я частичная сумма ряда Тейлора функции $F(z)$. Какие условия необходимо и достаточно наложить на положительную последовательность $\{G_n\}$ для того, чтобы соотношения

$$R_n(F) = O(G_n) \tag{1.25}$$

влекли $F(z) \in A$?

Поскольку последовательность наилучших приближений $\{E_n(F)\}$ является невозрастающей; то в качестве ее мажорант $\{G_n\}$ имело смысл рассматривать снова только невозрастающие последовательности. Как известно, последовательность приближений суммами Тейлора $\{R_n(F)\}$ может уже и не быть монотонной. Поэтому в качестве ее мажорант рассматриваются произвольные положительные последовательности $\{G_n\}$, не обязательно невозрастающие.

Решение поставленной задачи дается следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть* $G_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$; *для того чтобы соотношения* (1.25) *влекли* $F(z) \in A$, *необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\, G_n^*, \tag{1.26}$$

где

$$G_n^* = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} G_k \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.27}$$

Доказательство. Пусть ряд (1.26) сходится. В силу (1.25)

$$E_k(F) \leqslant R_k(F) \leqslant C_7\, G_k.$$

Но последовательность $\{E_k(F)\}$ не возрастает. Поэтому

$$E_n(F) = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} E_k(F) \leqslant C_7 \min_{1 \leqslant k \leqslant n} G_k = C_7\, G_n^*,$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} E_n(F) < \infty$$

и, следовательно, $F(z) \in A$.

Пусть теперь ряд (1.26) расходится. Для последовательности $\{G_n^*\}$ построим функцию $F_1(z) \notin A$, как указано в доказательстве теоремы 1, и покажем, что эта функция удовлетворяет условию

$$R_n(F_1) = O(G_n^*),$$

а тем более и условию (1.25). Пусть $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$. Имеем

$$F_1(z) - s_{n-1}(z) = u_k \sum_{\nu=n}^{2^k-1} e^{i2^{-k}\nu^2} z^\nu + \sum_{\varkappa=k+1}^{\infty} u_\varkappa \sum_{\nu=2^{\varkappa-1}}^{2^\varkappa-1} e^{i2^{-\varkappa}\nu^2} z^\nu.$$

Оценим это выражение. Согласно лемме 2

$$\Bigg\| \sum_{\nu=n}^{2^k-1} e^{i2^{-k}\nu^2} z^\nu \Bigg\| \leqslant C_8\, 2^{k/2}, \qquad \Bigg\| \sum_{\nu=2^{\varkappa-1}}^{2^\varkappa-1} e^{i2^{-\varkappa}\nu^2} z^\nu \Bigg\| \leqslant C_8\, 2^{\varkappa/2}.$$

Отсюда

$$R_n(F_1) = \big\|F_1(z) - s_{n-1}(z)\big\| \leqslant C_8 \Bigg(2^{k/2} u_k + \sum_{\varkappa=k+1}^{\infty} 2^{\varkappa/2} u_\varkappa \Bigg) = C_8\, G_{2^k}^* \leqslant C_8\, G_n^*,$$

и теорема 2 доказана.

Аналогичные предложения можно было бы установить для многих других методов приближения функций (например, для сумм Фейера), но мы не будем задерживаться на этом.

§ 2. Об абсолютной сходимости рядов Тейлора (продолжение)

2.1. Постановка задачи. В работе (I) рассмотрена следующая задача. Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция и $\omega(\delta, f)$ — ее модуль непрерывности. Какие условия необходимо и достаточно наложить на положительную функцию $\omega(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ для того, чтобы соотношения

$$\omega(\delta, f) = O\big(\omega(\delta)\big) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi) \tag{2.1}$$

влекли $f(x) \in A$? Ответ на этот вопрос дается такой теоремой.

Теорема II. *Пусть $\omega(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ — положительная функция. Для того чтобы соотношения* (2.1) *влекли $f(x) \in A$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \omega^*(n^{-1}), \tag{2.2}$$

где $\omega^*(\delta)$ — истинная мажоранта, построенная по мажоранте $\omega(\delta)$.

Истинную мажоранту $\omega^*(t)$ можно определить как верхнюю грань значений модулей непрерывности $\omega(t, f)$, взятую по всевозможным непрерывным периодическим функциям $f(x)$, удовлетворяющим условию

$$\omega(\delta, f) \leqslant \omega(\delta) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

В работе (I) указано эквивалентное конструктивное определение истинной мажоранты, но оно нам не понадобится.

Здесь рассматривается вопрос о перенесении этой теоремы на ряды Тейлора, а также аналогичная задача относительно мажорант модулей непрерывности k-го порядка также для рядов Тейлора. Отметим, что последняя задача не была до сих пор изучена даже для случая рядов Фурье.

План этого параграфа в общем совпадает с планом работы (I). Существенное новшество состоит лишь в том, что вместо построения истинной мажоранты мы употребляем здесь другой способ подправления заданной мажоранты $\omega(\delta)$. Этот способ значительно проще старого даже для случая $k = 1$ обыкновенных модулей непрерывности.

2.2. Модули непрерывности k-го порядка. Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция, вообще говоря, комплексная, и k — натуральное число. *Модулем непрерывности k-го порядка* функции $f(x)$ называется функция

$$\omega_k(\delta, f) = \sup_{|h|\leqslant\delta} \max_x |\Delta_h^k f(x)| \qquad (0 < \delta \leqslant \pi),$$

где

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x + jh)$$

— конечная разность функции $f(x)$ k-го порядка с шагом h.

В настоящее время не известны необходимые и достаточные условия для того, чтобы заданная функция $\omega(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ являлась модулем непрерывности k-го порядка для некоторой непрерывной периодической функции. Исключение составляет лишь случай $k = 1$, для которого такие условия были указаны С.М. Никольским [10].

Простейшие свойства модулей непрерывности k-го порядка рассмотрены мною в работе [11]. Отметим здесь некоторые из них [5]:

1) $\omega_k(0, f) = 0$, $\omega_k(\delta, f) \geqslant 0$

2) $\omega_k(\delta, f)$ — неубывающая функция от δ;

3) $\omega_k(\delta, f)$ — непрерывная функция от δ, в частности

$$\omega_k(\delta, f) \to 0 \qquad (\delta \to +0);$$

4) если $0 < \delta < \delta_1 \leqslant \pi$, то

$$\delta_1^{-k}\, \omega_k(\delta_1, f) \leqslant 2^k \delta^{-k}\, \omega_k(\delta, f);$$

5) если $k \geqslant l \geqslant 1$, то

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant 2^{k-l}\, \omega_l(\delta, f) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Далее, имеем такие свойства функции $\omega_k(\delta, f)$.

6) Пусть функция $u(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ положительна и не убывает; если

$$\omega_k(n^{-1}, f) = O\big(u(n^{-1})\big) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

то

$$\omega_k(\delta, f) = O\big(u(\delta)\big) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

[5] Строго говоря, в работе [11] рассматривается лишь случай действительных функций $f(x)$, однако все доказательства сохраняют силу и для комплексных $f(x)$.

Докажем это утверждение. Пусть $0 < \delta \leqslant \pi$ и n — наименьшее натуральное число, для которого $\delta \geqslant n^{-1}$. Тогда $\delta \leqslant \pi n^{-1}$. Поэтому, используя свойства 2), 4) и монотонность функции $u(\delta)$, получаем

$$\omega_k(\delta, f) = \omega_k\Big(\pi \cdot \frac{\delta}{\pi}, f\Big) \leqslant 2^k \pi^k \omega_k\Big(\frac{\delta}{\pi}, f\Big) \leqslant$$
$$\leqslant (2\pi)^k \omega_k(n^{-1}, f) = O\big(u(n^{-1})\big) = O\big(u(\delta)\big).$$

7) $\omega_k(\delta, \operatorname{Re} f) \leqslant \omega_k(\delta, f)$, $\omega_k(\delta, \operatorname{Im} f) \leqslant \omega_k(\delta, f)$,

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant \omega_k(\delta, \operatorname{Re} f) + \omega_k(\delta, \operatorname{Im} f).$$

Эти свойства очевидны.

Если функция $F(z)$ регулярна в круге $|z| < 1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, то ее модулем непрерывности k-го порядка будем называть функцию

$$\omega_k(\delta, F) = \omega_k\big(\delta, F(e^{ix})\big).$$

Такое определение модулей непрерывности аналитической функции "по окружности" является для нас наиболее удобным; однако возможны и другие определения.

8) Пусть функция $F(z)$ регулярна в круге $|z| < 1$. Тогда

$$E_n(F) \leqslant C_1(k)\, \omega_k(n^{-1}, F) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Это неравенство вытекает из теоремы 1 работы [11], согласно которой для любой непрерывной периодической функции $f(x)$

$$E_n^*(f) \leqslant C_2(k)\, \omega_k(n^{-1}, f) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2.3}$$

если учесть, что аппроксимирующие полиномы для функций $\operatorname{Re} F(e^{ix})$ и $\operatorname{Im} F(e^{ix})$ являются сопряженными тригонометрическими полиномами, и воспользоваться свойствами 7).

9) Пусть функция $F(z)$ регулярна в круге $|z| < 1$. Тогда

$$\omega_k(n^{-1}, f) \leqslant C_3(k)\, n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu(F).$$

Это неравенство можно установить точно так же, как доказывается теорема 8 работы [11]. При этом нужно воспользоваться таким аналогом неравенства С.Н. Бернштейна для обыкновенных многочленов:

$$\big\|p'(z)\big\| \leqslant n\, \big\|p_n(z)\big\|$$

(см. [24, 25] и [5]).

2.3. Операция **. Пусть k — натуральное число. Каждой положительной функции $\omega(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ отнесем "исправленную" функцию [6]

$$\omega_k^{**}(\delta) = \delta^k \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \big\{\eta^{-k} \inf_{\eta\leqslant\xi\leqslant\pi} \omega(\xi)\big\} \qquad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Для исследования этой операции расчленим ее на части, положив

$$\omega^{(0)}(\delta) = \inf_{\delta\leqslant\eta\leqslant\pi} \omega(\eta) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi),$$
$$\omega_k^{**}(\delta) = \delta^k \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \eta^{-k}\, \omega^{(0)}(\eta) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

[6] Эта операция обозначается через ** по аналогии с операцией *, введенной в работе (I).

Перечислим простейшие свойства функции $\omega^{**}(\delta)$.

1) если $1 \leqslant k < l$, то

$$0 \leqslant \omega_k^{**}(\delta) \leqslant \omega_l^{**}(\delta) \leqslant \omega(\delta) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Первое неравенство вытекает из положительности функции $\omega(\delta)$. Далее, имеем

$$\omega_k^{**}(\delta) = \delta^k \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \eta^{-k}\,\omega^{(0)}(\eta) = \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \left(\frac{\delta}{\eta}\right)^k \omega^{(0)}(\eta) \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \left(\frac{\delta}{\eta}\right)^l \omega^{(0)}(\eta) = \delta^l \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \eta^{-l}\,\omega^{(0)}(\eta) = \omega_l^{**}(\delta) \qquad (1 \leqslant k < l).$$

Наконец,

$$\delta^{-k}\omega_k^{**}(\delta) = \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \eta^{-k}\omega^{(0)}(\eta) \leqslant \delta^{-k}\,\omega^{(0)}(\delta),$$

откуда

$$\omega_k^{**}(\delta) \leqslant \omega^{(0)}(\delta) = \inf_{\delta\leqslant\eta\leqslant\pi} \omega(\eta) \leqslant \omega(\delta) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

2) $\delta^{-k}\,\omega_k^{**}(\delta)$ — невозрастающая функция от δ.

Действительно, если

$$0 < \delta < \delta_1 \leqslant \pi,$$

то

$$\delta^{-k}\omega_k^{**}(\delta) = \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \eta^{-k}\,\omega^{(0)}(\eta) \geqslant \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \eta^{-k}\,\omega^{(0)}(\eta) = \delta_1^{-k}\,\omega_k^{**}(\delta_1).$$

3) $\omega_k^{**}(\delta)$ — неубывающая функция от δ. Пусть $0 < \delta < \delta_1 \leqslant \pi$. Рассмотрим отдельно два случая.

а) $\inf_{0<\eta\leqslant\delta} \eta^{-k}\,\omega^{(0)}(\eta) = \inf_{0<\eta\leqslant\delta_1} \eta^{-k}\,\omega^{(0)}(\eta)$. Тогда

$$\omega_k^{**}(\delta) = \delta^k \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \eta^{-k}\,\omega^{(0)}(\eta) = \delta^k \inf_{0<\eta\leqslant\delta_1} \eta^{-k}\,\omega^{(0)}(\eta) <$$

$$< \delta_1^k \inf_{0<\eta\leqslant\delta_1} \eta^{-k}\,\omega^{(0)}(\eta) = \omega_k^{**}(\delta_1).$$

б) $\inf_{0<\eta\leqslant\delta} \eta^{-k}\,\omega^{(0)}(\eta) > \inf_{0<\eta\leqslant\delta_1} \eta^{-k}\,\omega^{(0)}(\eta)$. Тогда

$$\omega_k^{**}(\delta) = \delta^k \inf_{0<\eta\leqslant\delta} \eta^{-k}\,\omega^{(0)}(\eta) \leqslant \omega^{(0)}(\delta). \tag{2.4}$$

Кроме того, в силу условия б)

$$\inf_{0<\eta\leqslant\delta_1} \eta^{-k}\,\omega^{(0)}(\eta) = \min\{\inf_{0<\eta\leqslant\delta}, \inf_{\delta\leqslant\eta\leqslant\delta_1}\} = \inf_{\delta\leqslant\eta\leqslant\delta_1} \eta^{-k}\,\omega^{(0)}(\eta),$$

откуда, учитывая (2.4), выводим

$$\omega_k^{**}(\delta_1) = \delta_1^k \inf_{0<\eta\leqslant\delta_1} \eta^{-k}\,\omega^{(0)}(\eta) = \delta_1^k \inf_{\delta\leqslant\eta\leqslant\delta_1} \eta^{-k}\,\omega^{(0)}(\eta) =$$

$$= \inf_{\delta\leqslant\eta\leqslant\delta_1} \left(\frac{\delta_1}{\eta}\right)^k \omega^{(0)}(\eta) \geqslant \inf_{\delta\leqslant\eta\leqslant\delta_1} \omega^{(0)}(\eta) = \omega^{(0)}(\delta) \geqslant \omega_k^{**}(\delta).$$

Итак, в обоих случаях

$$\omega_k^{**}(\delta) \leqslant \omega_k^{**}(\delta_1) \qquad (0 < \delta < \delta_1 \leqslant \pi),$$

и свойство 3) доказано.

Из установленных свойств функции $\omega_k^{**}(\delta)$ вытекает, между прочим, что если для некоторого η_0 $(0 < \eta_0 \leqslant \pi)$
$$\omega_k^{**}(\eta_0) = 0,$$
то
$$\omega_k^{**}(\delta) \equiv 0.$$
В самом деле, если
$$0 < \delta \leqslant \eta_0,$$
то, согласно 1) и 3)
$$0 \leqslant \omega_k^{**}(\delta) \leqslant \omega_k^{**}(\eta_0),$$
т.е.
$$\omega_k^{**}(\delta) = 0 \qquad (0 < \delta \leqslant \eta_0).$$
Если же $\eta_0 \leqslant \delta \leqslant \pi$, то, согласно 1) и 2)
$$0 \leqslant \omega_k^{**}(\delta) \leqslant (\delta\, \eta_0^{-1})^k\, \omega_k^{**}(\eta_0),$$
откуда снова
$$\omega_k^{**}(\delta) = 0 \qquad (\eta_0 \leqslant \delta \leqslant \pi).$$

Связь операции ** с мажорантами модулей непрерывности k-го порядка основана на следующем свойстве функции $\omega_k^{**}(\delta)$.

4) Если $f(x)$ — непрерывная периодическая функция, $\omega(\delta) > 0$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ и
$$\omega_k(\delta, f) \leqslant M\, \omega(\delta) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi),$$
то
$$\omega_k(\delta, f) \leqslant 2^k\, M\, \omega_k^{**}(\delta) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Так как функция $\omega_k(\delta, f)$ не убывает, то
$$\omega_k(\delta, f) = \inf_{\delta \leqslant \eta \leqslant \pi} \omega_k(\eta, f) \leqslant M \inf_{\delta \leqslant \eta \leqslant \pi} \omega(\eta) = M\, \omega^{(0)}(\delta).$$
Далее, согласно свойству 4) модулей непрерывности k-го порядка
$$\delta^{-k} \omega_k(\delta, f) \leqslant 2^k\, \eta^{-k}\, \omega_k(\eta, f) \qquad (0 < \eta \leqslant \delta \leqslant \pi),$$
откуда
$$\omega_k^{**}(\delta) = \delta^k \inf_{0 < \eta \leqslant \delta} \eta^{-k}\, \omega^{(0)}(\eta) \geqslant M^{-1} \delta^k \inf_{0 < \eta \leqslant \delta} \eta^{-k}\, \omega_k(\eta, f) \geqslant$$
$$\geqslant M^{-1} \delta^k \cdot 2^{-k} \delta^{-k}\, \omega_k(\delta, f) = M^{-1} 2^{-k}\, \omega_k(\delta, f),$$
т.е.
$$\omega_k(\delta, f) \leqslant 2^k M\, \omega_k^{**}(\delta) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Это свойство показывает, что в качестве мажорант модулей непрерывности k-го порядка естественно выбирать лишь такие функции, которые обладают всеми свойствами исправленных мажорант $\omega_k^{**}(\delta)$. В противном случае для мажоранты $\omega(\delta)$ можно построить исправленную функцию $\omega_k^{**}(\delta)$, которая вновь оказывается мажорантой модулей непрерывности k-го порядка.

2.4. Аналог и обобщение теоремы II.

Лемма 3. *Пусть k — натуральное число, $-1 \leqslant \alpha < k - 1$, и функция $u(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ положительна, не убывает и удовлетворяет условию*
$$\eta^{-k}\, u(\eta) \leqslant C_4\, \delta^{-k}\, u(\delta) \qquad (0 < \delta < \eta \leqslant \pi). \tag{2.5}$$

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\, u(n^{-1}) \tag{2.6}$$

расходится, то существует положительная последовательность $\{B_n\}$ $(n = = 1, 2, \ldots)$, *обладающая следующими свойствами*:

1) $B_n \downarrow 0$;

2) *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\, B_n$ *расходится*;

3) $\sum_{n=1}^{N} n^{k-1}\, B_n = O\bigl(N^k\, u(N^{-1})\bigr)$.

Доказательство этой леммы почти не отличается от доказательства леммы 2 работы (I), и мы его опускаем.

Теперь мы можем перейти к изложению основных результатов этого параграфа. Итак, пусть функция

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n \tag{2.7}$$

регулярна в круге $|z| < 1$, непрерывна в круге $|z| \leqslant 1$ и k — натуральное число. При каких ограничениях на функцию $\omega(\delta) > 0$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ соотношения

$$\omega_k(\delta, F) = O\bigl(\omega(\delta)\bigr) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi)$$

влекут абсолютную сходимость ряда (2.16) в круге $|z| \leqslant 1$?

Начнем с рассмотрения того случая, когда мажоранта $\omega(\delta)$ ведет себя достаточно правильно.

Теорема 3. *Пусть k — натуральное число, а функция $\omega(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ положительна, не убывает и удовлетворяет условию*

$$\delta^{-k}\, \omega(\delta) \leqslant C_5\, \delta_1^{-k}\, \omega(\delta_1) \qquad (0 < \delta \leqslant \delta_1 \leqslant \pi). \tag{2.8}$$

Для того чтобы соотношения

$$\omega_k(\delta, F) = O\bigl(\omega(\delta)\bigr) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi) \tag{2.9}$$

влекли $F(z) \in A$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\, \omega(n^{-1}). \tag{2.10}$$

Доказательство. Пусть ряд (2.10) сходится. Согласно (2.3), свойству 7) модулей непрерывности (см. п. 2.2) и оценке (2.9) имеем

$$E_n^*\bigl(\operatorname{Re} F(e^{ix})\bigr) \leqslant C_2(k)\, \omega_k\bigl(n^{-1}, \operatorname{Re} F(e^{ix})\bigr) \leqslant C_2(k)\, \omega_k(n^{-1}, F) \leqslant C_6(k)\, \omega(n^{-1}),$$

откуда вытекает сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\, E_n^*\bigl(\operatorname{Re} F(e^{ix})\bigr).$$

Отсюда по теореме I $\operatorname{Re} F(e^{ix}) \in A$ и, следовательно,

$$F(z) \in A.$$

Пусть теперь ряд (2.10) расходится. Функция $u(\delta) = \omega(\delta)$ удовлетворяет всем условиям леммы 3 при $\alpha = -1/2$. Применяя эту лемму, получаем, что существует последовательность $B_n \downarrow 0$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} B_n = \infty,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} B_\nu = O\bigl(n^k \omega(n^{-1})\bigr). \tag{2.11}$$

Далее, воспользуемся теоремой 1, положив $G_n = B_n$. Получаем, что существует функция $F_1(z) \notin A$, для которой

$$E_n(F_1) = O(B_n).$$

Оценим модуль непрерывности этой функции. В силу свойств 9) и 6) модулей непрерывности и условия (2.11) имеем

$$\omega_k(n^{-1}, F_1) = O\Bigl(n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu(F_1)\Bigr) = O\Bigl(n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} B_\nu\Bigr) = O\bigl(\omega(n^{-1})\bigr),$$

$$\omega_k(\delta, F_1) = O\bigl(\omega(\delta)\bigr) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Итак, для построенной функции $F_1(z)$ выполняются соотношения (2.9). Теорема доказана.

Отметим, что условия этой теоремы выполняются, в частности, если функция $\omega(\delta)$ есть модуль непрерывности k-го порядка некоторой непрерывной периодической функции.

Переходим к рассмотрению общего случая, когда $\omega(\delta)$ — произвольная положительная функция.

Теорема 4. *Пусть k — натуральное число и $\omega(\delta) > 0$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$. Для того чтобы соотношения*

$$\omega_k(\delta, F) = O\bigl(\omega(\delta)\bigr) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi) \tag{2.12}$$

влекли $F(z) \in A$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \omega_k^{**}(n^{-1}), \tag{2.13}$$

где

$$\omega_k^{**}(\delta) = \delta^k \inf_{0<\eta<\delta} \Bigl\{\eta^{-k} \inf_{\eta \leqslant \xi \leqslant \pi} \omega(\xi)\Bigr\} \qquad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Доказательство. В самом деле, из свойств 1) и 4) операции ** следует, что классы функций, удовлетворяющих условиям (2.12) и

$$\omega_k(\delta, F) = O\bigl(\omega_k^{**}(\delta)\bigr),$$

тождественны. Так как, кроме того, функция $\omega_k^{**}(\delta)$ удовлетворяет условию (2.8), то справедливость теоремы 4 вытекает из теоремы 3.

2.5. Замечания. Аналогично тому, как это указывалось в п. 1.4, из теоремы 4 вытекает решение задачи 2 для классов $\mathfrak{M}$, определяемых условиями

$$\omega_k(\delta, f) = O\bigl(\omega(\delta)\bigr).$$

Следствие 4.1. *Пусть k — натуральное число и $\omega(\delta) > 0$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$. Для того чтобы соотношения*

$$\omega_k(\delta, f) = O\bigl(\omega(\delta)\bigr), \qquad \omega_k(\delta, \widetilde{f}\,) = O\bigl(\omega(\delta)\bigr) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi)$$

влекли $f(x) \in A$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд (2.13).

Сформулируем также решение задачи 1 для этих классов $\mathfrak{M}$.

Следствие 4.2. *Пусть k — натуральное число и $\omega(\delta) > 0$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$. Для того чтобы соотношения*

$$\omega_k(\delta, f) = O\big(\omega(\delta)\big) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi)$$

влекли $f(x) \in A$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд (2.13).

Отметим, что в случае $k = 1$ это следствие дает более простое решение задачи, рассмотренной в работе (I). Сопоставляя следствие 4.2 (для случая $k = 1$) с теоремой 2 работы (I), выводим, что для любой положительной функции $\omega(\delta)$ ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,\omega^*(n^{-1}) \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,\omega_1^{**}(n^{-1})$$

сходятся и расходятся одновременно.

2.6. О сходимости некоторых рядов. В заключение исследуем вопрос о зависимости между условиями сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,E_n(F) \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,\omega_k(n^{-1}, F) \qquad (k = 1, 2, \dots), \tag{2.14}$$

а также рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,\omega(n^{-1}) \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,\omega_k^{**}(n^{-1}) \qquad (k = 1, 2, \dots) \tag{2.15}$$

для произвольной положительной мажоранты $\omega(\delta)$.

Так как согласно свойствам 8) и 5) модулей непрерывности

$$E_n(F) \leqslant C_1(k)\,\omega_k(n^{-1}, F) \leqslant C_7(k, l)\,\omega_l(n^{-1}, F) \qquad (k > l \geqslant 1), \tag{2.16}$$

то сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,\omega_1(n^{-1}, F)$$

влечет сходимость всех рядов (2.14). Далее, если сходится хотя бы один из рядов (2.14), то в силу первого неравенства (2.16) сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,E_n(F).$$

Отсюда, используя случай $k = 1$ свойства 9) модулей непрерывности, получаем [7)]

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,\omega_1(n^{-1}, F) \leqslant C_1 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,n^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} E_\nu(F) =$$
$$= C_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} n^{-3/2}\,E_\nu(F) \leqslant C_8 \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-1/2}\,E_\nu(F) < \infty.$$

Таким образом, все ряды (2.14) сходятся и расходятся одновременно.

[7)] Аналогичное рассуждение уже проводилось в работе [12].

Тем не менее для одной и той же мажоранты $\omega(\delta)$ некоторые из рядов (2.15) могут сходиться, а другие расходиться.

Зафиксируем натуральное число k и построим возрастающую последовательность положительных чисел $\{n_p\}$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$, положив

$$n_0 = \frac{1}{\pi}, \quad n_1 = 1, \quad n_{p+1} = n_p^{2k^2+k} + 1 \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Ясно, что числа n_p $(p = 1, 2, \ldots)$ натуральные и

$$n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_p < \ldots$$

Далее, положим

$$m_p = n_p^{k/(k+1)}\, n_{p+1}^{1/(k+1)} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots).$$

Тогда для любого $p \geqslant 1$ будем иметь

$$n_p < m_p < n_{p+1},$$

$$\frac{n_p}{m_p} = \left(\frac{n_p}{n_{p+1}}\right)^{1/(k+1)} = \left(\frac{n_p}{n_p^{2k^2+k}+1}\right)^{1/(k+1)} \leqslant 2^{-1/(k+1)} \tag{2.17}$$

$$\frac{m_p^{1/2}}{n_p^k} = n_p^{\frac{k}{2(k+1)}-k}\, n_{p+1}^{\frac{1}{2(k+1)}} > n_p^{-\frac{2k^2+k}{2(k+1)}}\, n_p^{\frac{2k^2+k}{2(k+1)}} = 1. \tag{2.18}$$

Определим мажоранту $\omega(\delta)$, положив

$$\omega(\delta) = n_{p-1}^{-k} \qquad (n_p^{-1} < \delta \leqslant n_{p-1}^{-1}, \quad p = 1, 2, \ldots),$$

и подсчитаем для нее функцию $\omega_k^{**}(\delta)$. Так как $\omega(\delta)$ не убывает, то

$$\omega^{(0)}(\delta) = \omega(\delta).$$

Далее,

$$\inf_{n_{\mu+1}^{-1} < \eta \leqslant n_\mu^{-1}} \eta^{-k}\, \omega^{(0)}(\eta) = n_\mu^{-k} \inf_{n_{\mu+1}^{-1} < \eta \leqslant n_\mu^{-1}} \eta^{-k} = n_\mu^{-k}\, n_\mu^{k} = 1 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots),$$

и если $n_p^{-1} < \delta \leqslant n_{p-1}^{-1}$ $(p \geqslant 1)$, то

$$\inf_{n_p^{-1} < \eta \leqslant \delta} \eta^{-k}\, \omega^{(0)}(\eta) = n_{p-1}^{-k}\, \delta^{-1} \geqslant 1.$$

Поэтому для любого δ $(0 < \delta \leqslant \pi)$

$$\inf_{0 < \eta \leqslant \delta} \eta^{-k}\, \omega^{(0)}(\eta) = \min\Big\{\inf_{\mu \geqslant p} \inf_{n_{\mu+1}^{-1} < \eta \leqslant n_\mu^{-1}} \eta^{-k}\, \omega^{(0)}(\eta), \inf_{n_p^{-1} < \eta \leqslant \delta} \eta^{-k}\, \omega^{(0)}(\eta)\Big\} = 1$$

и, следовательно,

$$\omega_k^{**}(\delta) = \delta^k \inf_{0 < \eta \leqslant \delta} \eta^{-k}\, \omega^{(0)}(\eta) = \delta^k \qquad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Отсюда вытекает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\, \omega_k^{**}(n^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(k+1/2)} < \infty. \tag{2.19}$$

Переходим к оценке $\omega_k^{**}(\delta)$. Аналогично предыдущему имеем

$$\inf_{n_{\mu+1}^{-1} < \eta \leqslant n_\mu^{-1}} \eta^{-k-1}\, \omega^{(0)}(\eta) = n_\mu^{-k} \inf_{n_{\mu+1}^{-1} < \eta \leqslant n_\mu^{-1}} \eta^{-k-1} =$$
$$= n_\mu^{-k}\, n_\mu^{k+1} = n_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots),$$

и если $n_p^{-1} < \delta \leqslant n_{p-1}^{-1}$ $(p \geqslant 1)$, то
$$\inf_{n_p^{-1} < \eta \leqslant \delta} \eta^{-k-1}\,\omega^{(0)}(\eta) = n_{p-1}^{-k}\,\delta^{-k-1}.$$
Отсюда
$$\inf_{0<\eta\leqslant\delta} \eta^{-k-1}\,\omega^{(0)}(\eta) = \min\Bigl\{\inf_{\mu\geqslant p}\ \inf_{n_{\mu+1}^{-1}<\eta\leqslant n_\mu^{-1}} \eta^{-k-1}\,\omega^{(0)}(\eta),\ \inf_{n_p^{-1}<\eta\leqslant\delta} \eta^{-k-1}\,\omega^{(0)}(\eta)\Bigr\} =$$
$$= \min\{n_p,\, n_{p-1}^{-k}\delta^{-k-1}\} \qquad (n_p^{-1} < \delta \leqslant n_{p-1}^{-1},\quad p = 1, 2, \ldots).$$
Таким образом, если $n_p < n_{p-1}^{-k}\delta^{-k-1}$, т.е. $n_p^{-1} < \delta < m_{p-1}^{-1}$, то
$$\inf_{0<\eta\leqslant\delta} \eta^{-k-1}\,\omega^{(0)}(\eta) = n_p,$$
откуда
$$\omega_{k+1}^{**} = n_p\,\delta^{k+1} \qquad (n_p^{-1} < \delta < m_{p-1}^{-1}).$$
Если же $n_p \geqslant n_{p-1}^{-k}\,\delta^{-k-1}$, т.е. $m_{p-1}^{-1} \leqslant \delta \leqslant n_{p-1}^{-1}$, то
$$\inf_{0<\eta\leqslant\delta} \eta^{-k-1}\,\omega^{(0)}(\eta) = n_{p-1}^{-k}\,\delta^{-k-1},$$
откуда
$$\omega_{k+1}^{**} = n_{p-1}^{-k} \qquad (m_{p-1}^{-1} \leqslant \delta \leqslant n_{p-1}^{-1}).$$
Пользуясь последней формулой, а также оценками (2.17) и (2.18), получаем
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,\omega_{k+1}^{**}(n^{-1}) = \sum_{p=1}^{\infty}\ \sum_{n=n_p}^{n_{p+1}-1} n^{-1/2}\,\omega_{k+1}^{**}(n^{-1}) \geqslant \sum_{p=1}^{\infty}\ \sum_{n=n_p}^{m_p-1} n^{-1/2}\,\omega_{k+1}^{**}(n^{-1}) =$$
$$= \sum_{p=1}^{\infty} n_p^{-k} \sum_{n=n_p}^{m_p-1} n^{-1/2} \geqslant \sum_{p=1}^{\infty} n_p^{-k} \int_{n_p}^{m_p} x^{-1/2}\,dx = 2\sum_{p=1}^{\infty} n_p^{-k}\,(m_p^{1/2} - n_p^{1/2}) =$$
$$= 2\sum_{p=1}^{\infty} n_p^{-k}\,m_p^{1/2}\Bigl(1 - \sqrt{\frac{n_p}{m_p}}\Bigr) \geqslant C_9(k)\sum_{p=1}^{\infty} 1 = \infty. \qquad (2.20)$$
Далее, так как согласно свойству 1) операции $**$
$$\omega_{k+1}^{**}(\delta) \leqslant \omega_l^{**}(\delta) \leqslant \omega(\delta) \qquad (1 \leqslant k < l),$$
то
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,\omega_{k+1}^{**}(n^{-1}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,\omega_{k+1}^{**}(n^{-1}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,\omega(n^{-1}).$$
Сопоставляя эти неравенства с (2.19) и (2.20), выводим, что для построенной функции $\omega(\delta)$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,\omega_{\varkappa}^{**}(n^{-1}) < \infty \qquad (1 \leqslant \varkappa \leqslant k),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,\omega_l^{**}(n^{-1}) = \infty \qquad (l > k),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,\omega(n^{-1}) = \infty.$$

Несколько видоизменяя этот пример, мы могли бы получить функцию $\omega(\delta)$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,\omega_k^{**}(n^{-1}) < \infty \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

но

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,\omega(n^{-1}) = \infty.$$

Эти примеры показывают, в частности, что в условиях теоремы 4 нельзя заменить ряд (2.13) рядом (2.10).

Реферируя работу (I), Д.Е. Меньшов [9] указал, что в ней построен пример функции $\omega(\delta)$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,\omega(n^{-1}) = \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,\omega^{*}(n^{-1}) < \infty.$$

В действительности такого примера там нет, но его нетрудно получить. В самом деле, достаточно выбрать $\omega(\delta)$ так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,\omega(n^{-1}) = \infty,$$

но

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,\omega_1^{**}(n^{-1}) < \infty,$$

и учесть, что согласно сделанному выше замечанию ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,\omega^{*}(n^{-1}), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,\omega_1^{**}(n^{-1})$$

сходятся и расходятся одновременно.

§ 3. О точках абсолютной сходимости рядов Фурье

3.1. Постановка задачи. Вопрос о том, при каких модулях непрерывности ряды Фурье непрерывных периодических функций могут не иметь ни одной точки абсолютной сходимости, возник в одной из моих бесед с Н.К. Бари.

Здесь рассматривается следующая более общая задача: при каких ограничениях на положительную функцию $\omega(\delta)$ существует функция $F(z)$, регулярная в круге $|z| < 1$, непрерывная в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, удовлетворяющая условию

$$\omega_k(\delta, F) = O\big(\omega(\delta)\big)$$

и такая, что ряды Фурье функций $\operatorname{Re} F(e^{ix})$ и $\operatorname{Im} F(e^{ix})$ не имеют ни одной точки абсолютной сходимости? Под точкой абсолютной сходимости тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

здесь и в дальнейшем понимается точка, в которой сходится ряд

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx + b_n \sin nx|.$$

Оказывается, что теоремы 1 и 4 в части, касающейся существования функции $F(z) \notin A$, могут быть усилены таким образом, чтобы функции $\operatorname{Re} F(e^{ix})$ и $\operatorname{Im} F(e^{ix})$ имели ряды Фурье без точек абсолютной сходимости. Это усиление и осуществляется в настоящем параграфе. Аналогичная задача для степенных рядов, очевидно, не возникает, так как из расходимости ряда $\sum |c_n|$ автоматически вытекает, что ряд $\sum |c_n\, z^n|$ расходится в каждой точке единичной окружности $|z| = 1$.

3.2. Усиление теоремы 1.

Теорема 5. *Для любой последовательности* $\{G_n\}$, *удовлетворяющей условиям*

$$G_n > 0, \quad G_n \downarrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\, G_n = \infty, \tag{3.1}$$

найдется функция $F(z)$, *регулярная в круге* $|z| < 1$, *для которой*

$$E_n(F) = O(G_n), \tag{3.2}$$

и такая, что ряды Фурье функций $\operatorname{Re} F(e^{ix})$ *и* $\operatorname{Im} F(e^{ix})$ *не имеют ни одной точки абсолютной сходимости.*

Доказательство. Покажем, что всеми требуемыми свойствами обладает функция

$$F_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k - 1} e^{i 2^{-k} n^2} z^n, \tag{3.3}$$

где

$$u_k = 2^{-k/2} (G_{2^k} - G_{2^{k+1}}).$$

Как нам уже известно из доказательства теоремы 1,

$$F_1(z) \notin A \qquad \text{и} \qquad E_n(F_1) = O(G_n).$$

Остается показать, что ряды Фурье $\mathfrak{S}[\operatorname{Re} F_1(e^{ix})]$ и $\mathfrak{S}[\operatorname{Im} F_1(e^{ix})]$ не имеют точек абсолютной сходимости. Рассмотрим для определенности ряд $\mathfrak{S}[\operatorname{Re} F_1(e^{ix})]$; для ряда $\mathfrak{S}[\operatorname{Im} F_1(e^{ix})]$ рассуждение аналогично. Имеем

$$f_1(x) = \operatorname{Re} F_1(e^{ix}) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k - 1} \cos\bigl(nx + 2^{-k} n^2\bigr). \tag{3.4}$$

Таким образом, нужно установить, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k - 1} \bigl|\cos\bigl(nx + 2^{-k} n^2\bigr)\bigr| \tag{3.5}$$

расходится для любого $x \in [0, 2\pi]$. Для этого замечаем, что так как

$$\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k - 1} \bigl|\cos\bigl(nx + 2^{-k} n^2\bigr)\bigr| \geqslant \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k - 1} \cos^2\bigl(nx + 2^{-k} n^2\bigr) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k - 1} \bigl(1 + \cos 2(nx + 2^{-k} n^2)\bigr) = 2^{k-2} + \frac{1}{2} \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k - 1} \cos 2(nx + 2^{-k} n^2),$$

то

$$\sum_{k=1}^{N} u_k \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \bigl|\cos(nx+2^{-k}n^2)\bigr| \geqslant \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N} 2^k u_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} u_k \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \cos 2(nx+2^{-k}n^2).$$

Оценим последнюю сумму. Используя лемму 2, получаем, что

$$\biggl|\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \cos 2\bigl(nx+2^{-k}n^2\bigr)\biggr| = \biggl|\operatorname{Re}\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} e^{2i\left(2^{-k}n^2+nx\right)}\biggr| \leqslant$$

$$\leqslant \biggl|\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} e^{2i\left(2^{-k}n^2+nx\right)}\biggr| = O\bigl(2^{k/2}\bigr), \quad (3.6)$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{N} u_k \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \cos 2\bigl(nx+2^{-k}n^2\bigr) = O\biggl(\sum_{k=1}^{N} 2^{k/2}u_k\biggr),$$

$$\sum_{k=1}^{N} u_k \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \bigl|\cos 2\bigl(nx+2^{-k}n^2\bigr)\bigr| \geqslant \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N} 2^k u_k + O\biggl(\sum_{k=1}^{N} 2^{k/2}u_k\biggr).$$

Но, как уже подсчитывалось при доказательстве теоремы 1, ряд $\sum 2^k u_k$ расходится, а ряд $\sum 2^{k/2}u_k$ сходится. Отсюда вытекает, что для любого $x \in [0, 2\pi]$

$$\sum_{k=1}^{N} u_k \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \bigl|\cos 2\bigl(nx+2^{-k}n^2\bigr)\bigr| \geqslant \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N} 2^k u_k - O(1) \to \infty \qquad (N\to\infty), \quad (3.7)$$

и теорема доказана.

Так как оценка (3.6) согласно лемме 2 является равномерной относительно x, то фактически нами установлено, что неравенство (3.7) имеет место равномерно относительно x, т.е. что ряд (3.5) равномерно расходится.

3.3. Усиление теоремы 4.

Теорема 6. *Пусть k — натуральное число, $\omega(\delta) > 0$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ и расходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\,\omega_k^{**}(n^{-1}), \quad (3.8)$$

где

$$\omega_k^{**}(\delta) = \delta^k \inf_{0<\eta\leqslant\delta}\bigl\{\eta^{-k} \inf_{\eta\leqslant\xi\leqslant\pi} \omega(\xi)\bigr\}.$$

Тогда существует функция $F(z)$, регулярная в круге $|z| < 1$, для которой

$$\omega_k(\delta,\, F) = O\bigl(\omega(\delta)\bigr),$$

и такая, что ряды Фурье функций $\operatorname{Re} F(e^{ix})$ и $\operatorname{Im} F(e^{ix})$ не имеют ни одной точки абсолютной сходимости.

Для доказательства замечаем, что аналогичное усиление допускает также и теорема 3. Доказательство не меняется; только в том месте, где мы ссылались на теорему 1, нужно сослаться на более сильную теорему 5. После этого теорема 6 непосредственно вытекает из усиленной теоремы 3.

3.4. Замечания. Ясно, что аналогичное усиление можно также получить для теоремы 2. Излишне приводить здесь его формулировку.

Отметим следствия теорем 5 и 6 для рядов Фурье.

Следствие 5.1. *Для любой последовательности* $\{G_n\}$, *удовлетворяющей условиям* (3.1), *найдется непрерывная периодическая функция* $f(x)$, *для которой*

$$E_n^*(f) = O(G_n),$$

и такая, что ряды $\mathfrak{S}[f]$ *и* $\mathfrak{S}[\widetilde{f}]$ *не имеют ни одной точки абсолютной сходимости.*

Следствие 6.1. *Пусть* k *— натуральное число,* $\omega(\delta) > 0$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ *и расходится ряд* (3.8). *Тогда существует непрерывная периодическая функция* $f(x)$, *для которой*

$$\omega_k(\delta, f) = O\big(\omega(\delta)\big), \tag{3.9}$$

и такая, что ряды $\mathfrak{S}[f]$ *и* $\mathfrak{S}[\widetilde{f}]$ *не имеют ни одной точки абсолютной сходимости.*

Это последнее следствие вместе с теоремой 1 показывает, что все мажоранты модулей непрерывности $\omega(\delta)$ можно разделить на два класса: если ряд (3.8) сходится, то все непрерывные периодические функции $f(x)$, удовлетворяющие условию (3.9), обладают абсолютно сходящимися рядами Фурье; если же этот ряд расходится, то найдется функция $f_1(x)$, удовлетворяющая условиям (3.9) и такая, что ее ряд Фурье не имеет ни одной точки абсолютной сходимости.

Любопытно отметить, что аналогичная альтернатива уже не имеет места в вопросе о простой сходимости рядов Фурье. В самом деле, хорошо известно, что существуют периодические функции, удовлетворяющие условию

$$\omega(\delta, f) = O\big((\ln \delta^{-1})^{-1/2-\varepsilon}\big), \tag{3.10}$$

где $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$, и такие, что их ряды Фурье расходятся в отдельных точках. Однако в силу одного следствия теоремы Колмогорова—Селиверстова (см. [14, следствие из теоремы 1]) всякая функция, удовлетворяющая условию (3.10), имеет почти всюду сходящийся ряд Фурье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бернштейн С.Н.* Sur la convergence absolue des séries trigonométriques // C. R. Acad. Sci. 1914. V. 158. P. 1661–1663.
2. *Бернштейн С.Н.* Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов // Сообщ. Харьк. матем. об-ва. Сер. 2. 1914. Т. 14. С. 139–144.
3. *Бернштейн С.Н.* Sur certaines fonctions périodiques qui s'ecartent le moins possible de zéro // Сообщ. Харьк. матем. об-ва. Сер. 2. 1914. Т. 14. С. 145–152.
4. *Бернштейн С.Н.* Sur la convergence absolue des séries trigonométriques // C. R. Acad. Sci. 1934. V. 199. P. 397–400.
5. *Бернштейн С.Н.* Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. Ч. 1. — М.—Л., 1937.
6. *Бернштейн С.Н.* Собрание сочинений. Т. 1. Конструктивная теория функций (1905–1930). — М.: АН СССР, 1952.
7. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. — М.—Л., 1939.
8. *Кузьмин Р.О.* О некоторых тригонометрических неравенствах // Журнал Ленинградск. физ.-матем. об-ва. 1927. Т. 1. С. 233–239.
9. *Меньшов Д.Е.* Реферат 162 // Реферативный журнал. Математика. 1953. № 1. С. 162–163.

10. *Никольский С.М.* Ряды Фурье функций с данным модулем непрерывности // Докл. АН СССР. 1946. Т. 52. С. 191–194.
11. *Стечкин С.Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15. С. 219–242.
12. *Стечкин С.Б.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье. I // Матем. сб. 1951. Т. 29. С. 225–232.
13. *Стечкин С.Б.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1953. Т. 17. С. 87–98.
14. *Стечкин С.Б.* О теореме Колмогорова—Селиверстова // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1953. Т. 17. С. 499-512.
15. *Corput J.G.* Zahlentheoretische Abschätzungen // Math. Annalen. 1921. V. 84. P. 53–79.
16. *Fejér L.* Über gewisse Minimumprobleme der Funktionentheorie // Math. Annalen. 1926. V. 97. P. 104–123.
17. *Hardy G.H., Littlewood J.E.* Some problems of Diophantine approximation. IV. The trigonometrical series associated with the elliptic ϑ-functions // Acta Math. 1914. V. 37. P. 193–239.
18. *Hardy G.H., Littlewood J.E.* Some problems of Diophantine approximation. V. A remarkable trigonometrical series // Proc. Nat. Acad. Sci., USA. 1916. V. 2. P. 583–586.
19. *Hardy G.H., Littlewood J.E.* Some properties of fractional integrals / Records of Proc. at Meetings, XXXVII–XLI // Proc. London Math. Soc. (2). 1925. V. 24.
20. *Hardy G.H., Littlewood J.E.* Some new properties of Fourier constants // Math. Annalen. 1926. V. 97. P. 159–209.
21. *Koksma J.F.* Diophantische Approximationen // Ergebn. der Mathem. und ihrer Grenzgebiete. — Berlin. 1936. — B. 4, H. 4.
22. *Landau E.* Über das Vorzeichen der Gaussschen Summe // Nachr. Ges. der Wiss. zu Göttingen. 1928. P. 19–20.
23. *Landau E.* Über eine trigonometrische Summe // Nachr. Ges. der Wiss. zu Göttingen. 1928. P. 21–24.
24. *Riesz M.* Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome // Jahresber. der deutschen Math. Vereinigung. 1914. V. 23. P. 354–368.
25. *Szasz O.* Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe // Math. Zeitschr. 1918. V. 1. P. 163–183.