ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ*)

§ 1. Введение

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция с периодом 2π, $\omega(\delta, f)$ — ее модуль непрерывности и $E_n(f)$ $(n = 1, 2, \dots)$ — наилучшие приближения функции $f(x)$ посредством тригонометрических полиномов порядка $n - 1$. Если ряд Фурье функции $f(x)$ абсолютно сходится, то будем писать $f \in A$; в противном случае будем писать $f \notin A$.

Поставим следующую задачу: какие условия необходимо и достаточно наложить на положительную последовательность $\{B_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ для того, чтобы соотношения

$$E_n(f) = O(B_n) \qquad (n = 1, 2 \dots) \tag{1}$$

влекли $f \in A$? Иными словами, ищутся такие условия на последовательность $\{B_n\}$, при выполнении которых всякая непрерывная периодическая функция $f(x)$, удовлетворяющая соотношениям (1), обладает абсолютно сходящимся рядом Фурье и при невыполнении которых существует непрерывная периодическая функция $f(x)$, удовлетворяющая соотношениям (1) и такая, что $f \notin A$.

Решение этой задачи непосредственно вытекает из известных результатов С.Н. Бернштейна [1] и может быть сформулировано в виде следующего предложения.

(I) *Пусть* $\{B_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ *— положительная последовательность. Соотношения*

$$E_n(f) = O(B_n) \qquad (n = 1, 2 \dots)$$

влекут $f \in A$ *в том и только том случае, если сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} B_n^*, \tag{2}$$

где

$$B_n^* = \min_{k=1,2,\dots,n} B_k \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{3}$$

Итак сходимость ряда (2) является наиболее широким условием, влекущим $f \in A$, в терминах мажорант для наилучших приближений.

Поставим аналогичную задачу относительно мажорант для модулей непрерывностей: какие условия необходимо и достаточно наложить на положительную функцию $\omega(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ для того, чтобы соотношения

$$\omega(\delta, f) = O\big(\omega(\delta)\big) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi) \tag{4}$$

влекли $f \in A$? Иными словами, каковы наиболее широкие условия абсолютной сходимости рядов Фурье в терминах мажорант для модулей непрерывности?

В этом направлении С.Н. Бернштейн [1] получил следующие результаты.

(II) *Если сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \omega\Big(\frac{1}{n}\Big), \tag{5}$$

---

*) Изв. АН СССР. Сер. матем. 1953. Т. 17. С. 87–98.

то соотношения (4) *влекут* $f \in A$.

(III) *Если для некоторого* $\varepsilon > 0$ *функция* $\delta^{-\varepsilon}\omega(\delta)$ *возрастает, а функция* $\delta^{\varepsilon-1}\omega(\delta)$ *убывает и ряд* (5) *расходится, то соотношения* (4) *не влекут* $f \in A$.

Некоторые обобщения теоремы (III) были получены Сасом (см. [4, замечание 6.1]).

В настоящей работе дается полное решение поставленной выше задачи. Оказывается, что если выполняются соотношения (4), то на самом деле

$$\omega(\delta, f) = O\big(\omega^*(\delta)\big), \qquad (0 < \delta < \pi),$$

где $\omega^*(\delta) \leqslant \omega(\delta)$ — "истинная мажоранта", построение которой по функции $\omega(\delta)$ дается в § 2. Истинные мажоранты обладают примерно теми же свойствами, что и модули непрерывности, и с помощью одной леммы о числовых рядах (см. § 3, лемму 2) нам удается установить, что если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\,\omega^*\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

расходится, то соотношения (4) не влекут $f \in A$. Отсюда без труда выводится

Основная теорема. *Пусть* $\omega(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ — *положительная функция. Соотношения* (4) *влекут* $f \in A$ *в том и только том случае, если сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\,\omega^*\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

где $\omega^*(\delta)$ — *истинная мажоранта, построенная по мажоранте* $\omega(\delta)$.

§ 2. Модули непрерывности и их мажоранты

В этом параграфе излагаются свойства модулей непрерывности непрерывных периодических функций и их мажорант, которые понадобятся в дальнейшем.

Если $f(x)$ — непрерывная функция с периодом 2π, то ее модуль непрерывности $\omega(\delta, f)$ $(0 \leqslant \delta \leqslant \pi)$ обладает следующими свойствами (см., например, [3, § 1]):

1) $\omega(0, f) = 0$;

2) $\omega(\delta, f)$ — неубывающая функция от δ;

3) $\omega(\delta, f)$ — непрерывная функция от δ;

4) если $\delta \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$ и $\delta + \eta \leqslant \pi$, то

$$\omega(\delta + \eta, f) \leqslant \omega(\delta, f) + \omega(\eta, f).$$

Свойства 1)–4) полностью характеризуют модули непрерывности непрерывных периодических функций [1]. Иными словами, если некоторая функция $\omega(\delta)$ задана на отрезке $[0, \pi]$ и удовлетворяет условиям 1)–4), то найдется непрерывная функция $f(x)$ с периодом 2π, для которой

$$\omega(\delta, f) = \omega(\delta) \qquad (0 \leqslant \delta \leqslant \pi).$$

В частности, если положить

$$f(x) = \omega\big(|x|\big) \qquad \big(|x| \leqslant \pi\big).$$

[1] Этот факт известен (см. [2]).

В соответствии с этим, если функция $\omega(\delta)$, заданная на отрезке $[0,\pi]$, удовлетворяет условиям 1)–4), то мы будем в дальнейшем называть ее *модулем непрерывности.*

Из 1)–4) вытекают такие свойства модулей непрерывности (см. [3]):

5) если $\delta > 0$, p — натуральное число и $p\delta \leqslant \pi$, то

$$\omega(p\delta, f) \leqslant p\,\omega(\delta, f);$$

6) если $0 < \delta < \eta \leqslant \pi$, то

$$\eta^{-1}\,\omega(\eta, f) \leqslant 2\delta^{-1}\,\omega(\delta, f).$$

Нам потребуются также два свойства мажорант модулей непрерывности:

7) пусть функция $u(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ положительна и не убывает; если

$$\omega\Bigl(\frac{1}{n}, f\Bigr) = O\biggl(u\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr)\biggr) \qquad (n = 1, 2, \dots), \tag{6}$$

то

$$\omega(\delta, f) = O\bigl(u(\delta)\bigr) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi). \tag{7}$$

Докажем это утверждение. Пусть $0 < \delta \leqslant \pi$ и n — наименьшее натуральное число, для которого $\delta \geqslant 1/n$. Очевидно, что $\delta \leqslant \pi/4 \leqslant 4/n$. Поэтому, используя свойства 5) и 2) модулей непрервности, формулу (6) и монотонность функции $u(\delta)$, получаем

$$\omega(\delta, f) = \omega\Bigl(4\,\frac{\delta}{4}, f\Bigr) \leqslant 4\omega\Bigl(\frac{\delta}{4}, f\Bigr) \leqslant 4\omega\Bigl(\frac{\delta}{n}, f\Bigr) = \\ = O\biggl(u\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr)\biggr) = O\bigl(u(\delta)\bigr) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi),$$

и соотношения (7) установлены.

8) $\omega(1/n, f) \leqslant (C_1/n)\sum_{\nu=1}^{n} E_\nu(f)$ $\quad (n = 1, 2, \dots)$ (см. [3, случай $k = 1$ теоремы 8]).

Переходим к рассмотрению дальнейших свойств мажорант модулей непрерывности.

Операция *. Каждой положительной функции $\omega(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ поставим в соответсвие новую функцию $\omega^*(\delta)$ $(0 \leqslant \delta \leqslant \pi)$ по следующему правилу:

$$\omega^{(0)}(0) = 0, \qquad \omega^{(0)}(\delta) = \inf_{\delta \leqslant \eta \leqslant \pi} \omega(\eta) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi); \tag{8}$$

далее, положим

$$\omega^{(1)}(\delta) = \inf_{0 \leqslant h \leqslant \delta} \bigl\{\omega^{(0)}(h) + \omega^{(0)}(\delta - h)\bigr\} \qquad (0 \leqslant \delta \leqslant \pi); \tag{9}$$

вообще, если функции $\omega^0(\delta), \dots, \omega^{(k)}(\delta)$ $(k \geqslant 0)$ уже определены, то положим

$$\omega^{(k+1)}(\delta) = \inf_{0 \leqslant h \leqslant \delta} \bigl\{\omega^{(k)}(h) + \omega^{(k)}(\delta - h)\bigr\} \qquad (0 \leqslant \delta \leqslant \pi). \tag{10}$$

Наконец, положим

$$\omega^*(\delta) = \lim_{k \to \infty} \omega^{(k)}(\delta) \qquad (0 \leqslant \delta \leqslant \pi). \tag{11}$$

Из формул (8)–(10) нетрудно усмотреть, что

$$\omega(\delta) \geqslant \omega^{(0)}(\delta) \geqslant \dots \geqslant \omega^{(k)}(\delta) \geqslant \dots \geqslant 0. \tag{12}$$

Поэтому предел (11) существует для любого δ из отрезка $[0,\pi]$.

Функцию $\omega^*(\delta)$ мы будем называть *истинной мажорантой*, построенной по функции $\omega(\delta)$. Основания для такого наименования станут ясны из дальнейшего.

Отметим несколько простых свойств истинных мажорант.

1) $0 \leqslant \omega^*(\delta) \leqslant \omega(\delta)\ \ (0<\delta\leqslant\pi)$ (см. (12)).

2) $\omega^*(\delta)$ — неубывающая функция от δ.

Действительно, функция $\omega^{(0)}(\delta)$ не убывает по самому ее построению; далее, индукция по k показывает, что функции $\omega^{(k)}(\delta)$ не убывают при произвольном k; остается заметить, что предельный переход не нарушает неубывания.

3) Если $\delta>0$, $\eta>0$ и $\delta+\eta\leqslant\pi$, то

$$\omega^*(\delta+\eta)\leqslant\omega^*(\delta)+\omega^*(\eta). \tag{13}$$

Из соотношения (10) вытекает, что

$$\omega^{(k+1)}(\delta+\eta)\leqslant\omega^{(k)}(\delta)+\omega^{(k)}(\eta).$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$, получаем (13).

4) Если $0<\delta<\eta\leqslant\pi$, то

$$\eta^{-1}\,\omega^*(\eta)\leqslant 2\delta_1\,\omega^*(\delta). \tag{14}$$

Это свойство устанавливается точно так же, как аналогичное свойство модулей непрерывности. Прежде всего, из (13) следует, что если $\delta>0$, p — натуральное число и $p\delta\leqslant\pi$, то

$$\omega^*(p\delta)\leqslant p\,\omega^*(\delta). \tag{15}$$

Далее, пусть n — наименьшее натуральное число, для которого $n\delta\geqslant\eta$, т.е. $\delta\geqslant\eta/n$. Очевидно, $n\geqslant 2$. В силу (15) и монотонности $\omega^*(\delta)$ имеем

$$\omega^*(\eta)=\omega^*\Bigl(n\,\frac{\eta}{n}\Bigr)\leqslant n\,\omega^*\Bigl(\frac{\eta}{n}\Bigr)\leqslant n\,\omega^*(\delta). \tag{16}$$

Но согласно определению n $(n-1)\delta<\eta$, откуда

$$n<\frac{\eta}{\delta}+1=\frac{\eta+\delta}{\delta}<\frac{2\eta}{\delta}\,.$$

Отсюда и в силу (16) получаем

$$\omega^*(\eta)\leqslant 2\,\frac{\eta}{\delta}\,\omega^*(\delta),$$

что эквивалентно (14).

5) Если $\omega_1(\delta)=c\,\omega(\delta)$, где $c>0$, то

$$\omega_1^*(\delta)=c\,\omega^*(\delta).$$

Это свойство очевидно.

Нетрудно показать, что если

$$\inf_{0<\delta\leqslant\pi}\omega(\delta)=0,$$

то $\omega^*(\delta)$ есть модуль непрерывности, но это нам не понадобится.

Связь операции $*$ с мажорантами модулей непрерывности дается следующей леммой.

Лемма 1. *Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция и $\omega(\delta)$ $(0<<\delta\leqslant\pi)$ — положительная функция. Если*

$$\omega(\delta,f)=O\bigl(\omega(\delta)\bigr)\qquad(0<\delta\leqslant\pi), \tag{17}$$

то
$$\omega(\delta,f)=O\big(\omega^*(\delta)\big)\qquad(0<\delta\leqslant\pi),\tag{18}$$
где $\omega^*(\delta)$ *— истинная мажоранта, построенная по мажоранте* $\omega(\delta)$*.*

Доказательство. Пусть сперва
$$\omega(\delta,f)\leqslant\omega(\delta)\qquad(0<\delta\leqslant\pi).$$
В силу монотонности модуля непрерывности имеем
$$\omega(\delta,f)\leqslant\omega(\eta,f)\leqslant\omega(\eta)\qquad(0<\delta\leqslant\eta\leqslant\pi),$$
откуда
$$\omega(\delta,f)\leqslant\inf_{\delta\leqslant\eta\leqslant\pi}\omega(\eta)\leqslant\omega^{(0)}(\eta)\qquad(0<\delta\leqslant\pi).$$
Очевидно, что это неравенство справедливо также и для $\delta=0$.

Далее, согласно свойству 4) модулей непрерывности, если $0\leqslant h\leqslant\delta\leqslant\pi$, то
$$\omega(\delta,f)\leqslant\omega(h,f)+\omega(\delta-h,f)\leqslant\omega^{(0)}(h)+\omega^{(0)}(\delta-h),$$
откуда
$$\omega(\delta,f)\leqslant\inf_{0\leqslant h\leqslant\delta}\big\{\omega^{(0)}(h)+\omega^{(0)}(\delta-h)\big\}=\omega^{(1)}(\delta)\qquad(0\leqslant\delta\leqslant\pi).$$
Аналогично устанавливается, что
$$\omega(\delta,f)\leqslant\omega^{(k)}(\delta)\qquad(0\leqslant\delta\leqslant\pi,\quad k=1,2,\ldots).$$
Переходя в этом неравенстве к пределу при $k\to\infty$, получаем, что
$$\omega(\delta,f)\leqslant\omega^*(\delta)\qquad(0\leqslant\delta\leqslant\pi).$$

Пусть теперь в соответсвии с (17)
$$\omega(\delta,f)\leqslant C_2\,\omega(\delta)\qquad(0<\delta\leqslant\pi).$$
Предыдущее рассуждение показывает, что тогда
$$\omega(\delta,f)\leqslant\big(C_2\,\omega(\delta)\big)^*\qquad(0\leqslant\delta\leqslant\pi),$$
откуда в силу свойства 5) истинных мажорант
$$\omega(\delta,f)\leqslant C_2\,\omega^*(\delta)\qquad(0\leqslant\delta\leqslant\pi).$$
Отсюда вытекают соотношения (18), и лемма 1 доказана.

Лемма 1 оправдывает наименование истинной мажоранты, введенное нами для функции $\omega^*(\delta)$.

§ 3. Основная лемма

Лемма 2. *Пусть* $0<\alpha\leqslant1$ *и функция* $u(\delta)$ $(0<\delta\leqslant\pi)$ *положительна, не убывает и*
$$\eta^{-1}\,u(\eta)\leqslant C_3\,\delta^{-1}\,u(\delta)\qquad(0<\delta<\eta\leqslant\pi).\tag{19}$$

Если ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}\,u\Big(\frac{1}{n}\Big)\tag{20}$$
расходится, то существует положительная последовательность $\{B_n\}$ $(n=$ $=1,2,\ldots)$*, обладающая следующими свойствами:*

1) $B_n \downarrow 0$ [2];

2) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} B_n$ *расходится*;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} B_k \leqslant n\, u\Big(\dfrac{1}{n}\Big) \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Сделаем несколько предварительных замечаний.

Достаточно установить, что существует последовательность $\{B_n\}$, обладающая свойствами 1), 2) и

3′) $\sum\limits_{k=1}^{n} B_k \leqslant C_4\, n\, u\Big(\dfrac{1}{n}\Big) \quad (n = 1, 2, \ldots)$, где C_4 — некоторая положительная константа, ибо тогда последовательность $\{B_n / C_4\}$ будет обладать всеми нужными свойствами.

Из условий, которым удовлетворяет функция $u(\delta)$, вытекает, что

$$n\, u\Big(\frac{1}{n}\Big) \to \infty \qquad (n \to \infty). \tag{21}$$

В самом деле, допустим, что

$$\varliminf_{n\to\infty} n\, u\Big(\frac{1}{n}\Big) < \infty.$$

Тогда можно найти сколь угодно большие N_s, для которых

$$N_s\, u\Big(\frac{1}{N_s}\Big) < C_5 \qquad (s = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда в силу (19)

$$n\, u\Big(\frac{1}{n}\Big) \leqslant C_3\, N_s\, u\Big(\frac{1}{N_s}\Big) \leqslant C_3\, C_5 = C_6$$

для $1 \leqslant n < N_s$, т.е.

$$u\Big(\frac{1}{n}\Big) \leqslant \frac{C_6}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

что противоречит расходимости ряда (20).

Возможны два случая:

α) $u(\delta) \geqslant C_7 \ (0 < \delta \leqslant \pi)$, где $C_7 > 0$;

β) $u(\delta) \to 0$ при $\delta \to +0$.

Случай α) тривиален,так как тогда произвольная последовательность $\{B_n\}$, обладающая свойствами 1) и 2) леммы, обладает также свойством 3′).

Рассмотрим основной случай β). Итак, пусть

$$u(\delta) \to 0 \qquad (\delta \to +0). \tag{22}$$

Определим индуктивно возрастающую последовательность номеров $\{n_k\}$ ($k = 1, 2, \ldots$). Положим $n_1 = 1$; если $n_1, \ldots, n_k$ уже определены, то пусть n_{k+1} есть наименьший номер $N > n_k$, для которого

$$N\, u\Big(\frac{1}{N}\Big) > 2 n_k\, u\Big(\frac{1}{n_k}\Big).$$

[2] Запись $B_n \downarrow 0$ означает, что $B_1 \geqslant B_2 \geqslant \ldots \geqslant B_n \geqslant \ldots$ и $B_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом,

$$n\, u\Big(\frac{1}{n}\Big) \leqslant 2n_k\, u\Big(\frac{1}{n_k}\Big) \qquad (n_k \leqslant n < n_{k+1}), \tag{23}$$

$$n_{k+1}\, u\Big(\frac{1}{n_{k+1}}\Big) > 2n_k\, u\Big(\frac{1}{n_k}\Big) \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{24}$$

В силу (21) такой номер n_{k+1} заведомо найдется.

Отметим, что

$$n_{k+1} > 2n_k \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{25}$$

Действительно, если $n_k < n \leqslant 2n_k$, то в силу монотонности функции $u(\delta)$

$$n\, u\Big(\frac{1}{n}\Big) \leqslant 2n_k\, u\Big(\frac{1}{n_k}\Big), \tag{26}$$

и, следовательно, $n \neq n_{k+1}$.

Определим теперь последовательность $\{B_n\}$, положив

$$B_1 = u(1), \qquad B_n = u\left(\frac{1}{n_{k+1}}\right) \qquad (n_k < n \leqslant n_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots). \tag{27}$$

Покажем, что эта последовательность обладает свойствами 1), 2) и 3′).

Свойство 1) вытекает из того, что $n_k \uparrow \infty$, $u(\delta)$ есть неубывающая функция от δ и согласно (22) $u(\delta) \to 0$ при $\delta \to +0$.

Для доказательства свойства 2) замечаем, что, полагая ради удобства, $n_0 = 0$, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} B_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} n^{-\alpha} B_n = \sum_{k=1}^{\infty} u\Big(\frac{1}{n_k}\Big) \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} n^{-\alpha} \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} u\Big(\frac{1}{n_k}\Big) \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} n_k^{-\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} u\Big(\frac{1}{n_k}\Big) \frac{n_k - n_{k-1}}{n_k^{\alpha}}\,. \tag{28}$$

Отсюда в силу (25)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} B_n \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} n_k^{1-\alpha}\, u\Big(\frac{1}{n_k}\Big). \tag{29}$$

Далее, пользуясь неравенствами (23), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}\, u\Big(\frac{1}{n}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} n^{-1-\alpha} \cdot n\, u\Big(\frac{1}{n}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant 2 \sum_{k=1}^{\infty} n_k\, u\Big(\frac{1}{n_k}\Big) \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} n^{-1-\alpha} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{\infty} n_k\, u\Big(\frac{1}{n_k}\Big) \sum_{n=n_k}^{\infty} n^{-1-\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant 2C_8(\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} n_k\, u\Big(\frac{1}{n_k}\Big) \cdot n_k^{-\alpha} = C_9(\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} n_k^{1-\alpha}\, u\Big(\frac{1}{n_k}\Big).$$

В силу расходимости ряда (20) это доказывает расходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k^{1-\alpha}\, u\Big(\frac{1}{n_k}\Big),$$

а из (29) вытекает теперь расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} B_n,$$

и свойство 2) установлено.

Остается показать, что последовательность $\{B_n\}$ обладает свойством $3'$). Пусть

$$n_{k-1} < N \leqslant n_k$$

для некоторого натурального k. Имеем

$$\sum_{n=1}^{N} B_n = \sum_{\varkappa=1}^{n_k} \sum_{n=n_{\varkappa-1}+1}^{n_\varkappa} B_n + \sum_{n=n_{k-1}+1}^{N} B_n =$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{k-1} (n_\varkappa - n_{\varkappa-1})\, u\Big(\frac{1}{n_\varkappa}\Big) + (N - n_{k-1})\, u\Big(\frac{1}{n_k}\Big) \leqslant \sum_{\varkappa=1}^{k-1} n_\varkappa\, u\Big(\frac{1}{n_\varkappa}\Big) + N\, u\Big(\frac{1}{n_k}\Big). \tag{30}$$

Пусть $N > 1$, т.е. $k > 1$. В силу (24),

$$n_\varkappa\, u\Big(\frac{1}{n_\varkappa}\Big) \leqslant 2^{\varkappa-k+1}\, n_{k-1}\, u\Big(\frac{1}{n_k}\Big) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Подставляя эти оценки в неравенство (30), находим

$$\sum_{n=1}^{N} B_n \leqslant \sum_{\varkappa=1}^{k-1} n_\varkappa\, u\Big(\frac{1}{n_\varkappa}\Big) + N\, u\Big(\frac{1}{n_k}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant n_{k-1}\, u\Big(\frac{1}{n_{k-1}}\Big) \sum_{\varkappa=1}^{k-1} 2^{\varkappa-k+1} + N\, u\Big(\frac{1}{n_k}\Big) \leqslant 2\, n_{k-1}\, u\Big(\frac{1}{n_{k-1}}\Big) + N\, u\Big(\frac{1}{N}\Big), \tag{31}$$

так как функция $u(\delta)$ не убывает.

Но согласно (19)

$$n_{k-1}\, u\Big(\frac{1}{n_{k-1}}\Big) \leqslant C_2\, N\, u\Big(\frac{1}{N}\Big).$$

Отсюда и из (31) следует, что

$$\sum_{n=1}^{N} B_n \leqslant 2n_{k-1}\, u\Big(\frac{1}{n_{k-1}}\Big) + N\, u\Big(\frac{1}{N}\Big) \leqslant 2C_3 N\, u\Big(\frac{1}{N}\Big) + N\, u\Big(\frac{1}{N}\Big) =$$

$$= C_{10} N\, u\Big(\frac{1}{N}\Big) \qquad (N > 1).$$

Кроме того, $B_1 = u(1)$. Отсюда окончательно получаем

$$\sum_{n=1}^{N} B_n \leqslant C_{10}\, N\, u\Big(\frac{1}{N}\Big).$$

Этим установлено, что последовательность $\{B_n\}$ обладает свойством $3'$), и лемма полностью доказана.

В настоящей работе мы воспользуемся этой леммой только для $\alpha = 1/2$.

§ 4. Теоремы

Переходим к изложению основных результатов работы.

Теорема 1. *Пусть функция* $u(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ *положительна, не убывает и*

$$\eta^{-1}\, u(\eta) \leqslant C_{11}\delta^{-1}\, u(\delta) \qquad (0 < \delta < \eta \leqslant \pi). \tag{32}$$

Если ряд

$$\sum_{n_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\, u\Big(\frac{1}{n}\Big) \tag{33}$$

расходится, то существует непрерывная периодическая функция $f_1 \notin A$, *для которой*

$$\omega(\delta, f_1) = O\big(u(\delta)\big) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi). \tag{34}$$

Доказательство. Функция $u(\delta)$ удовлетворяет всем условиям леммы 2 для $\alpha = 1/2$. Применяя эту лемму, получаем, что существует положительная последовательность $\{B_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, обладающая свойствами:

1) $B_n \downarrow 0$; (35)

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} B_n$ расходится;

3) $\sum_{k=1}^{n} B_k \leqslant n\, u(1/n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. (36)

Воспользуемся теоремой (I) введения. Так как в силу (3) и (35)

$$B_n^* = B_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

то мы получаем, что существует функция $f_1 \notin A$, для которой

$$E_n(f_1) = O(B_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Оценим модуль непрерывности этой функции. В силу свойства 8) модулей непрерывности имеем

$$\omega\Big(\frac{1}{n},\, f_1\Big) = O\bigg(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} B_k\bigg),$$

откуда согласно (36)

$$\omega\Big(\frac{1}{n},\, f_1\Big) = O\bigg(u\Big(\frac{1}{n}\Big)\bigg).$$

Пользуясь свойством 7) модулей непрерывности, выводим отсюда, что

$$\omega(\delta,\, f_1) = O\big(u(\delta)\big) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Итак, $f_1 \notin A$ и для этой функции выполняются соотношения (34). Тем самым теорема 1 доказана.

Отметим, что эта теорема является обобщением сформулированной во введении теоремы (III).

Следствие 1. *Пусть функция* $u(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ *положительна, не убывает, а функция* $\delta^{-1}\, u(\delta)$ *не возрастает. Если ряд* (33) *расходится, то существует непрерывная периодическая функция* $f_1 \notin A$, *для которой*

$$\omega(\delta,\, f_1) = O\big(u(\delta)\big) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Действительно, если функция $\delta^{-1}\, u(\delta)$ не возрастает, то для нее выполняется условие (32).

Согласно результатам § 2 всякий модуль непрерывности $\omega(\delta)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Отсюда вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть $\omega(\delta)$ $(0 \leqslant \delta \leqslant \pi)$ есть модуль непрерывности. Если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\, \omega\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

раходится, то существует непрерывная периодическая функция $f_1 \notin A$, для которой

$$\omega(\delta,\, f_1) = O\big(\omega(\delta)\big) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

ТЕОРЕМА 2 (основная теорема). *Пусть $\omega(\delta)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ — положительная функция. Соотношения*

$$\omega(\delta,\, f) = O\big(\omega(\delta)\big) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi) \tag{37}$$

влекут $f \in A$ в том и только том случае, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\, \omega^*\Big(\frac{1}{n}\Big), \tag{38}$$

где $\omega^*(\delta)$ — истинная мажоранта, построенная по мажоранте $\omega(\delta)$.

Нужно доказать два утверждения:

α) если ряд (38) сходится, то соотношения (37) влекут $f \in A$;

β) если ряд (38) расходится, то соотношения (37) не влекут $f \in A$, т.е. существует функция $f_2 \notin A$, для которой выполняются соотношения (37).

Доказательство. α) Согласно лемме 1 соотношения (37) влекут

$$\omega(\delta,\, f) = O\big(\omega^*(\delta)\big) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Теперь $f \in A$ вытекает из сходимости ряда (38) в силу сформулированной во введении теоремы (II).

β) Согласно результатам § 2 всякая истинная мажоранта $\omega^*(\delta)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Применяя эту теорему к $u(\delta) = \omega^*(\delta)$, получаем, что сущестует функция $f_2 \notin A$, для которой

$$\omega(\delta,\, f_2) = O\big(\omega^*(\delta)\big) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Но в силу свойства 1) истинных мажорант

$$\omega^*(\delta) \leqslant \omega(\delta) \qquad (0 < \delta \leqslant \pi).$$

Поэтому для функции f_2 выполняются соотношения (37).

Тем самым установлены утверждения α) и β), и теорема 2 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бернштейн С.Н.* Sur la convergence absolue des séries trigonométriques // C. R. 1934. V. 199. P. 397–400.
2. *Никольский С.М.* Ряды Фурье функций с данным модулем непрерывности // Докл. АН СССР. 1946. Т. 52. С. 191–194.
3. *Стечкин С.Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15. С. 219–242.
4. *Szăsz O.* Fourier series and mean moduli of continuity // Trans. Amer. Math. Soc. 1937. V. 42. P. 366-395.