ЗАДАЧА ТУРАНА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ *)

Введение. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$S_n(\alpha) = \sum_{\nu=1}^{n} e(\alpha_\nu), \qquad e(u) = \exp(2\pi i u),$$

$$K \in \mathbb{N}, \qquad V_n(K, \alpha) = \max\{|S_n(k\alpha)| \mid k = 1, \dots, K\},$$

$$U_n(K) = \min\{V_n(K, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{T}^n\}.$$

Задачу о поведении $U_n(K)$ мы будем называть *задачей Турана для тригонометрических сумм.* Она имеет ряд важных приложений в математике и особенно в теории чисел. Задаче Турана посвящена работа автора [1], в которой подробно описана история задачи и получены новые оценки $U_n(K)$ снизу и сверху. Настоящая статья фактически является продолжением работы [1].

Напомним кратко основные результаты по задаче Турана для тригонометрических сумм, дополнив при этом приведенный в [1] список литературы по данному вопросу. Через $C_1, C_2, \dots$ обозначаются абсолютные положительные константы.

(I) Случай $n = 1$ тривиален: $U_1(K) = 1 \quad (K \in \mathbb{N})$. Поэтому в дальнейшем всегда $n \geqslant 2$.

(II) $U_n(K) = 0 \quad (K = 1, \dots, n-1)$.

(III) $U_n(n) = 1$.

(IV) $C_1\sqrt{K-n+1} \leqslant U_n(K) \leqslant K-n+1 \quad (n \leqslant K \leqslant n+\sqrt{n})$.

(V) $C_1\sqrt{K-n+1} \leqslant U_n(K) \leqslant C_2\sqrt{n} \quad (n+\sqrt{n} \leqslant K \leqslant 2n)$.

(VI) $C_3\sqrt{n} \leqslant U_n(K) \leqslant C_2\sqrt{n} \quad (2n \leqslant K \leqslant n^2)$.

(VII) $C_4\bigl(n\ln K/\ln(e^2 n/\ln K)\bigr)^{1/2} \leqslant U_n(K) \leqslant C_5\sqrt{n\ln K} \quad (n^2 \leqslant K \leqslant e^{2n})$.

(VIII) $n\cos(2\pi/K^{1/n}) \leqslant U_n(K) \leqslant n\left(1 - C_7K^{-2/(n-1)}\right) \quad (e^{2n} \leqslant K)$.

Верхняя оценка (VI) доказана Х. Куэффелеком [2], усилившим теорему 1 работы [1], утверждавшую, что $U_n(\beta n^2) \leqslant C(\beta)n$ для любого $\beta \in (0,1)$. Соответствующий результат для $U_n(n^{\beta+1})$ был ранее получен Х. Монтгомери [3]; кроме того, в [3] доказана нижняя оценка (VII) (в равносильной форме); см. также [4]. Верхнюю оценку (VIII) установили П. Эрдёш и А. Реньи [5]. Отметим также, что, используя технику работы [2], можно усилить верхнюю оценку (VII) для K, незначительно больших n^2, однако, по-видимому, уже для $K = \gamma n^2$, $\gamma > 1$, порядок верхней оценки (VII) не может быть улучшен таким способом.

В настоящей работе доказывается

Теорема 1. *Для любого $K \geqslant n$ имеет место неравенство*

$$U_n(K) \leqslant C_8\sqrt{(K-n+1)\ln n}\,. \tag{1}$$

Оценка (1) улучшает ранее известные оценки при $n + C_9\ln n < K < n + C_{10}\, n/\log n$. Если $K < n + C_9\log n$, то (1) мажорируется верхней оценкой (IV), а если $K > n + C_{10}n/\log n$, то верхними оценками (V)–(VIII).

---

*) Труды МИАН СССР. 1997. Т. 219. С. 335–339.

Пусть $W_n(K)$ $(n, K \in \mathbb{N})$ — некоторая неотрицательная функция, для которой известны оценки сверху и снизу:

$$0 \leqslant \underline{W}_n(K) \leqslant W_n(K) \leqslant \overline{W}_n(K) \qquad (n, k \in \mathbb{N}).$$

Назовем *глупостью* функцию $H:\ \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty]$, определяемую как

$$H_n(K) = \overline{W}_n(K)/\underline{W}_n(K)\,;$$

при этом будем считать, что $0/0 = 1$. Ясно, что всегда $H_n(K) \geqslant 1$, и чем точнее найдена величина $W_n(K)$, тем меньше глупость $H_n(K)$. Полное решение задачи соответствует случаю $H_n(K) = 1$ $\big((n, K) \in \mathbb{N}^2\big)$. Определим также для всякого $n \in \mathbb{N}$ равномерную (относительно K) глупость

$$H_n = \sup\{H_n(K) |\ K \in \mathbb{N}\}.$$

Результаты, приведенные в [1], давали оценку равномерной глупости H_n для функции $U_n(K)$ порядка $n^{1/4}$. Теорема 1 позволяет существенно снизить равномерную глупость: теперь мы имеем $H_n \leqslant C_{11}\sqrt{\ln n}$. Наихудший порядок $\sqrt{\ln n}$ величины $H_n(K)$ достигается при $n + \beta \ln n \leqslant K \leqslant n + \ln n/\beta$ и при $(1+\beta)n^2 \leqslant K \leqslant \exp(n^{1-\beta})$, где $\beta > 0$.

В [1] отмечено, что $H_n(K) \to 1$ при $\ln K/n \to \infty$. При больших K естественно возникает задача нахождения правильного порядка величины $n - U_n(K)$. Соотношения (VIII) дают его только при $K \leqslant \exp(\beta n^2)$, $\beta > 0$. В настоящей работе мы улучшаем левое неравенство (VIII).

Теорема 2. *Пусть $K \geqslant 4^{n-1}$. Тогда*

$$U_n(K) \geqslant 1 + (n-1)\cos\frac{2\pi}{K^{1/(n-1)}}\,.$$

Таким образом, мы получаем правильный порядок разности $n - U_n(K)$ для всех n и K:

$$C_{12}n \leqslant n - U_n(K) \leqslant n \qquad (K \leqslant e^{2n}),$$

$$C_7 n K^{-2/(n-1)} \leqslant n - U_n(K) \leqslant C_{13} n K^{-2/(n-1)} \qquad (K \geqslant e^{2n})\,.$$

Доказательство теорем.

Доказательство теоремы 1. Отметим несколько случаев, когда утверждение теоремы очевидно или вытекает из известных оценок. Если $n \leqslant K \leqslant n + \ln n$, то оно следует из неравенства $U_n(K) \leqslant K - n + 1$ [1, соотношение (4)]. При $K > n^2$ теорема является следствием тривиального неравенства $U_n(K) \leqslant n$, и, наконец, при $2n \leqslant K \leqslant n^2$ она вытекает из верхней оценки (VI). Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что

$$n + \ln n < K < 2n\,. \tag{2}$$

Идея доказательства теоремы состоит в том, чтобы получить вектор $\alpha \in \mathbb{T}^n$ с небольшим значением $V_n(K, \alpha)$ путем опускания вектора $\big(\frac{1}{K+1}, \frac{2}{K+1}, \ldots, 1\big)$; имеется в виду случайное отбрасывание $K - n + 1$ координат.

Положим $m = K + 1$, $p = (K - n + 1)/(K + 1)$ и рассмотрим независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_m$ с распределением

$$\Pr[X_j = 1 - p] = p, \qquad \Pr[X_j = -p] = 1 - p \qquad (j = 1, \ldots, m).$$

Фиксируем числа $x_j \in [-1, 1]$ и определим случайные величины $z_j = x_j X_j$ $(j = 1, \ldots, m)$. Пусть $b_j = E[z_j^2] = x_j^2 p(1-p)$ $(j = 1, \ldots, m)$, $X = z_1 + \ldots + z_m$, $B = b_1 + \ldots + b_m$. Для $j = 1, \ldots, m$ мы имеем

$$E[z_j] = 0, \qquad E[|z_j|^k] \leqslant E[z_j^2] \leqslant b_j k!/2 \qquad (k \geqslant 2)\,.$$

Поэтому можно воспользоваться следующей оценкой вероятности большого уклонения X от нуля: для любого $t > 0$

$$\Pr\left[|X| > t\sqrt{B} + t^2\right] < 2e^{-t^2/2}$$

[6, с. 180]. Отсюда, полагая

$$t = \sqrt{2\ln(4K+2)}, \qquad a = t\sqrt{B} + t^2\,, \tag{3}$$

мы получим

$$\Pr\left[|X| > a\right] < 1/(2K+1)\,. \tag{4}$$

Переписывая неравенство (4) для векторов

$$(x_j)_{j=1}^{K+1} = \left(\cos\Big(\frac{2\pi jk}{K+1}\Big)\right)_{j=1}^{K+1} \qquad (k = 0, \ldots, K),$$

$$(x_j)_{j=1}^{K+1} = \left(\sin\Big(\frac{2\pi jk}{K+1}\Big)\right)_{j=1}^{K+1} \qquad (k = 1, \ldots, K),$$

мы имеем

$$\Pr\left[\left|\sum_{j=1}^{K+1} \cos\Big(\frac{2\pi jk}{K+1}\Big) X_j\right| > a\right] < \frac{1}{2K+1} \qquad (k = 0, \ldots, K), \tag{5}$$

$$\Pr\left[\left|\sum_{j=1}^{K+1} \sin\Big(\frac{2\pi jk}{K+1}\Big) X_j\right| > a\right] < \frac{1}{2K+1} \qquad (k = 1, \ldots, K). \tag{6}$$

Поскольку сумма вероятностей всех событий в (5) и (6) меньше 1, то можно выбрать вектор $(X_1, \ldots, X_{K+1}) \in \{1-p, p\}^{K+1}$ такой, что

$$\left|\sum_{j=1}^{K+1} \cos\Big(\frac{2\pi jk}{K+1}\Big) X_j\right| \leqslant a \qquad (k = 0, \ldots, K),$$

$$\left|\sum_{j=1}^{K+1} \sin\Big(\frac{2\pi jk}{K+1}\Big) X_j\right| \leqslant a \qquad (k = 1, \ldots, K).$$

Из последних неравенств следует, что

$$\left|\sum_{j=1}^{K+1} X_j\right| \leqslant a\,, \tag{7}$$

$$\left|\sum_{j=1}^{K+1} e\Big(\frac{jk}{K+1}\Big) X_j\right| \leqslant 2a \qquad (k = 1, \ldots, K). \tag{8}$$

Положим $Y_j = p + X_j \in \{0, 1\}$ $(j = 1, \ldots, K+1)$. Из неравенств (7), (8) и соотношений

$$\sum_{j=1}^{K+1} p = (K+1)p = n\,, \qquad \sum_{j=1}^{K+1} p\, e\Big(\frac{jk}{K+1}\Big) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, K)$$

вытекает, что

$$\left|\sum_{j=1}^{K+1} Y_j - n\right| \leqslant a\,, \tag{9}$$

$$\left|\sum_{j=1}^{K+1} e\Big(\frac{jk}{K+1}\Big)Y_j\right| \leqslant 2a \qquad (k=1,\ldots,K)\,. \tag{10}$$

Пусть $\{\beta_1,\ldots,\beta_l\} = \{j/(K+1) \mid 1\leqslant j\leqslant K+1,\ Y_j=1\}$. Рассмотрим вектор $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_l)$. Соотношения (9) и (10) можно переписать в виде

$$|l-n|\leqslant a, \qquad |V_l(K,\beta)|\leqslant 2a\,.$$

Опуская или поднимая вектор β до n-мерного вектора α, мы получим

$$|V_n(K,\alpha)|\leqslant 3a\,. \tag{11}$$

Нам остается оценить a. Из (2) и (3) следует, что

$$t\leqslant\sqrt{2\ln(8n)}\leqslant\sqrt{8\ln n}<3\sqrt{\ln n} \tag{12}$$

и, кроме того,

$$t<3\sqrt{\ln n}<3\sqrt{K-n+1}\,. \tag{13}$$

Подставляя неравенства (12) и (13) и оценку

$$B\leqslant mp(1-p)<mp=K-n+1$$

в (3), мы получаем

$$a=t\,(t+\sqrt{B})<3\sqrt{\ln n}\,(t+\sqrt{K-n+1})<12\sqrt{\ln n}\sqrt{K-n+1}\,.$$

Отсюда и из (11) вытекает утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Воспользуемся методом диофантовых приближений. Пусть $\omega=K^{1/(n-1)}$, тогда $\omega\geqslant 2$. По теореме Дирихле для любого $\alpha\in\mathbb{R}^n$ найдется $k\in\mathbb{N}$, $1\leqslant k\leqslant\omega^{n-1}=K$, для которого

$$||k(\alpha_\nu-\alpha_n)||\leqslant\omega^{-1} \qquad (\nu=1,\ldots,n-1),$$

где $||\beta||=\min\{|\beta-z|\mid z\in\mathbb{Z}\}$. Следовательно,

$$|S_n(k\alpha)|\geqslant \operatorname{Re}\big(S_n(k\alpha)e(-k\alpha_n)\big)=1+\sum_{\nu=1}^{n-1}\cos(2\pi k(\alpha_\nu-\alpha)n)\geqslant$$

$$\geqslant 1+(n-1)\cos\frac{2\pi}{K^{1/(n-1)}}\,,$$

откуда вытекает утверждение теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стечкин С.Б.* Некоторые экстремальные свойства тригонометрических сумм // Матем. заметки. 1994. Т. 55, вып. 2. С. 130–143.
2. *Queffelec H.* Norm of the inverse of a matrix; solution to a problem of Schaffer. — Publ. Math. d'Orsay, 1996.
3. *Montgomery H.L.* Turan's method // Inst. Mittag-Leffler. Rept № 15. — Stockgolm, 1978.
4. *Montgomery H.L.* Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis. — Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1994.
5. *Erdös P., Renyi A.* A probabilistic approach to problems of diophantine approximation // Ill. J. Math. 1957. V. 1. P. 303–315.
6. *Бернштейн С.Н.* Теория вероятностей. — М.—Л.: ОГИЗ, 1946.