# О ПОРЯДКЕ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ *)

### Введение

В работе рассматриваются непрерывные функции $f$ с периодом $2\pi$ и их приближения тригонометрическими полиномами. Через $t_n(x)$ обозначается тригонометрический полином порядка не выше $n$, а через $t_n^*(x) = t_n^*(x, f)$ — тригонометрический полином, наименее уклоняющийся от $f$ среди всех $t_n(x)$. Мы полагаем $\|f\| = \max_x |f(x)|$ и, несколько отступая от обычных обозначений, пишем

$$E_n[f] = \|f - t_{n-1}^*(f)\| \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Введем ряд определений.

Определение 1. Пусть $k$ — натуральное число. Будем говорить что функция $\omega_k(\delta, f)$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$ есть *модуль непрерывности $k$-го порядка* функции $f$, если

$$\omega_k(\delta, f) = \max_{|h| \leqslant \delta} \|\Delta_h^k f(x)\|,$$

где $\Delta_h^k f(x)$ — конечная разность функции $f$ $k$-го порядка с шагом $h$:

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x + ih).$$

Аналогичное понятие уже вводилось ранее С.Н. Бернштейном [1].

Среди модулей непрерывности всех порядков особенно важное значение имеют случаи $k = 1$ и $k = 2$. Случай $k = 1$ является классическим; вместо $\omega_1(\delta, f)$ мы будем писать просто $\omega(\delta, f)$ и называть эту функцию, как это и принято, *модулем непрерывности* [16]; функцию $\omega_2(\delta, f)$ мы будем называть *модулем гладкости.*

Определение 2. Зададим натуральное число $k$. Будем говорить, что функция $\omega(\delta)$ есть *функция сравнения $k$-го порядка*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $\omega(\delta)$ определена для $0 \leqslant \delta \leqslant \pi$;
2) $\omega(\delta)$ не убывает;
3) $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$;
4) $\omega(\delta) \geqslant C_1 \delta^k > 0$ при $\delta > 0$.

Нетрудно показать, что если $f \not\equiv 0$, то $\omega_k(\delta, f)$ есть функция сравнения $k$-го порядка (см. лемму 5).

Определение 3. Зафиксируем натуральное число $k$ и функцию сравнения $k$-го порядка $\omega(\delta)$. Будем говорить, что *функция $f$ принадлежит к классу $H_k[\omega]$* $(f \in H_k[\omega])$, если найдется константа $C_2 > 0$ такая, что

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant C_2 \omega(\delta) \qquad (0 \leqslant \delta \leqslant \pi).$$

Вместо $H_k[\delta^\alpha]$ $(0 < \alpha \leqslant k)$ будем писать просто $H_k^\alpha$.

Если для последовательности функций $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$

$$\omega_k(\delta, f_n) \leqslant C_2 \omega(\delta) \qquad (0 \leqslant \delta \leqslant \pi, \quad n = 1, 2, \dots),$$

где $C_2$ не зависит от $n$, то будем писать: $f_n \in H_k[\omega]$ равномерно относительно $n$.

---

*) Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15. С. 219–242.

Понятие классов $H_k[\omega]$ является естественным обобщением классов Липшица и классов функций, имеющих ограниченную $k$-ю производную.

Определение 4. Зафиксируем число $\alpha > 0$ и обозначим через $p$ наименьшее натуральное число, не меньшее чем $\alpha$ ($p = -[-\alpha]$). Будем говорить, что *функция* $\varphi(\delta)$ $(0 \leqslant \delta \leqslant \pi)$ *принадлежит к классу* $N^\alpha$ ($\varphi \in N^\alpha$), если она:

1) есть функция сравнения $p$-го порядка;

2) удовлетворяет условию: существует константа $C_3 > 0$ такая, что для $0 < \delta < \eta \leqslant \pi$

$$\eta^{-\alpha}\varphi(\eta) \leqslant C_3\delta^{-\alpha}\varphi(\delta).$$

Условие 2) является небольшим ослаблением условия "$\eta^{-\alpha}\varphi(\eta)$ не убывает". Функции класса $N^\alpha$ будут играть основную роль во всем дальнейшем изложении.

Определение 5. Будем говорить, что *функция* $\psi(t)$ *имеет порядок* $\varphi(t)$, если найдутся две положительные константы, $C_4$ и $C_5$, такие, что для всех $t$, для которых определены функции $\varphi$ и $\psi$,

$$C_4\varphi(t) \leqslant \psi(t) \leqslant C_5\varphi(t).$$

При выполнении этих условий будем писать

$$\psi(t) \sim \varphi(t).$$

В настоящей работе мы рассматриваем следующие задачи.

1. При каких ограничениях на непрерывную функцию $F(u)$ $(-1 \leqslant u \leqslant 1)$ ее наилучшие приближения $E_n[F; -1, 1]$ обыкновенными многочленами имеют заданный порядок $\varphi(n^{-1})$?

2. При каких ограничениях на непрерывную периодическую функцию $f(x)$ ее наилучшие приближения $E_n[f]$ тригонометрическими полиномами имеют заданный порядок $\varphi(n^{-1})$?

Подстановка $u = \cos x$ сводит задачу 1 к задаче 2. Достаточно, следовательно, рассматривать лишь задачу 2.

Мы рассматриваем задачу 2 для неаналитических функций $f(x)$. Точнее, мы ограничиваемся случаем, когда $\varphi(\delta) \in N^\alpha$ для некоторого $\alpha > 0$.

С.Н. Бернштейн, Д. Джексон и Ш. Валле Пуссен получили зависимости между оценками сверху для $E_n[f]$ и дифференциальными свойствами $f$. Некоторые дополнения к их теоремам доказаны А. Зигмундом (формулировки теорем см. ниже). Нам предстоит поэтому получить зависимости между дифференциальными свойствами $f$ и оценками $E_n[f]$ снизу.

Необходимо еще отметить, что для ряда неаналитических функций $F$ известны асимптотические формулы для наилучших приближений. Впервые такую формулу доказал С.Н. Бернштейн [2], именно,

$$E_n[|x|; -1, +1] \approx \frac{\mu}{n} \qquad (\mu > 0).$$

Наша основная теорема формулируется следующим образом.

*Пусть $\varphi \in N^\alpha$. Для того чтобы*

$$E_n \sim \varphi\left(\frac{1}{n}\right),$$

*необходимо, чтобы для любого натурального $k > \alpha$, и достаточно, чтобы для некоторого натурального $k > \alpha$*

$$\omega_k(\delta, f) \sim \varphi(\delta).$$

Изложим теперь кратко содержание каждого из параграфов работы.

В § 1 выводятся основные свойства модулей непрерывности высших порядков. Почти все эти свойства используются в дальнейшем тексте.

§ 2 посвящен обобщению теоремы Джексона. Как известно, Д. Джексон [6, 7] (см. также [5, с. 296]) доказал следующую теорему: *если $f$ имеет непрерывную $r$-ю производную $f^{(r)}$, то*

$$E_n[f] \leqslant C_6(r) n^{-r} \omega\left(\frac{1}{n}, f^{(r)}\right).$$

Таким образом, теорема Джексона дает оценку сверху для наилучших приближений, если известны дифференциальные свойства аппроксимируемой функции.

В 1945 г. А. Зигмунд [16] обобщил эту теорему для одного частного случая, именно, он показал, что если *)

$$\omega_2(\delta, f^{(r)}) = Oo(\delta),$$

то

$$E_n[f] = Oo(n^{-r-1}).$$

В 1947 г. появилась работа С.Н. Бернштейна [4]. Одна из теорем этой работы содержит в качестве следствия такое предложение: пусть

$$\omega_k(\delta, f) = O(\delta^\alpha) \qquad (0 < \alpha \leqslant k),$$

тогда

$$E_n[f] = O(n^{-\alpha}).$$

Мы доказываем в § 2 следующее обобщение этих теорем:

$$E_n[f] \leqslant C_7(k+r) n^{-r} \omega_k\left(\frac{1}{n}, f^{(r)}\right) \qquad (r = 0, 1, \ldots, \quad n = 1, 2, \ldots).$$

В § 3 формулируется доказанное в работе автора [9] обобщение известного неравенства С.Н. Бернштейна [1, 3] для производных от тригонометрического полинома. Мы перечисляем затем ряд следствий из нашего неравенства. Они играют существенную роль при доказательстве теорем § 4.

В § 4 рассматривается следующая задача. Пусть полином $t_n$ близок к заданной функции $f$ или последовательность полиномов $\{t_n\}$ достаточно хорошо аппроксимирует заданную функцию $f$. Как связаны тогда дифференциальные свойства $f$ с дифференциальными свойствами $t_n$?

Если $t_n$ образуются из $f$ посредством регулярного метода суммирования рядов Фурье, то ответ тривиален: для того чтобы $f \in H_k[\omega]$, необходимо и достаточно, чтобы $t_n \in H_k[\omega]$ равномерно относительно $n$. Частный случай $k = 1$ и сумм Фейера отмечен в книге А. Зигмунда (см. [15, § 4.79]).

Оказывается, что этот результат сохраняется и для наилучших полиномов: для того чтобы $f \in H_k[\omega]$, необходимо и достаточно, чтобы $t_n^* \in H_k[\omega]$ равномерно относительно $n$.

Отметим еще один результат параграфа: для того чтобы $f \in H_k^\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы

$$(t_n^*)^{(k)} = O(1).$$

Заметим, что М. Заманский [13, 14] рассматривает сходные вопросы, но его результаты менее полны.

---

*) При этой записи имеется в виду или $O$, или $o$.

§ 5 посвящен "обратным теоремам" теории приближения (см. [1, 12]).

Хорошо известно такое предложение: пусть

$$E_n[f] = O(n^{-\alpha});$$

тогда, если $\alpha$ не целое, $r = [\alpha]$, $\beta = \alpha - r$, то $f$ имеет непрерывную производную $f^{(r)} \in \operatorname{Lip} \beta$.

Случай целого $\alpha$ рассмотрен А. Зигмундом [16]. В этом случае

$$\omega_2(\delta, f^{(\alpha-1)}) = O(\delta).$$

Нетрудно показать (см., например, [4]), что эти два предложения эквивалентны следующему: пусть $0 < \alpha < k$ и

$$E_n[f] = O(n^{-\alpha});$$

тогда

$$\omega_k(\delta, f) = O(\delta^\alpha).$$

В работе [1] С.Н. Бернштейн доказал также эквивалентность условий

$$E_n = O\Big(\frac{1}{\ln n}\Big) \quad \text{и} \quad \omega(\delta) = O\Big(\frac{1}{\ln \delta^{-1}}\Big).$$

Мы переносим эти теоремы на условия вида

$$E_n[f] = O\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где $\varphi \in N^\alpha$.

Кроме того, в этом параграфе доказано, например, такое предложение: пусть $k$ — натуральное число и

$$E_n[f] = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right);$$

для того чтобы $f \in H_k[\omega]$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$(t_n^*)^{(k)} = O\left(n^k \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

В конце параграфа даются уточнения теорем Валле Пуссена [12]. Аналогичными задачами занимались также А. Ф. Тиман и М. Ф. Тиман (см. [11]).

В § 6 доказывается основная теорема. Мы даем здесь же оценку $E_n[f]$ снизу, если

$$0 < C_8\delta^\beta \leqslant \omega_k(\delta, f) \leqslant C_9\delta^\alpha \qquad (0 \leqslant \alpha < \beta < k).$$

Именно, тогда

$$E_n[f] \geqslant C_{10} n^{-\beta(k-\alpha)/(k-\beta)} > 0 \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Случай $\alpha = 0$ установлен С.Н. Бернштейном [1].

Настоящая работа представляет собой почти без изменений кандидатскую диссертацию автора. Формулировки основных теорем работы опубликованы ранее [10]. Все теоремы этой работы были получены мною в результате занятий на семинаре по теории приближений в Математическом институте Академии наук СССР, и я приношу глубокую благодарность руководителю семинара С.Н. Бернштейну за внимание к моей работе и ценные замечания.

## § 1. Простейшие свойства модулей непрерывности

Этот параграф носит вспомогательный характер. Здесь устанавливается несколько простейших свойств модулей непрерывности высших порядков. Все рассматриваемые здесь функции $f_1,\ f_2,\ \ldots$ непрерывны.

Лемма 1. *Для любого натурального $k$ и любого $\delta \geqslant 0$*

$$\omega_k(\delta, f_1 + f_2) \leqslant \omega_k(\delta, f_1) + \omega_k(\delta, f_2). \tag{1.1}$$

Эта лемма очевидна.

Лемма 2. *Пусть $k$ и $l$ — натуральные числа, $l < k$. Тогда для любого $\delta \geqslant 0$*

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant 2^k \|f\|, \tag{1.2}$$

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant 2^{k-l} \omega_l(\delta, f). \tag{1.3}$$

Доказательство. Положим

$$\Delta_h^0 f(x) = f(x).$$

Тогда для $0 \leqslant l < k$ имеем

$$\Delta_h^k f(x) = \Delta_h^{k-l} \Delta_h^l f(x) = \sum_{i=0}^{k-l} (-1)^{k-l-i} \binom{k-l}{i} \Delta_h^l f(x + ih),$$

откуда

$$\|\Delta_h^k f(x)\| \leqslant \sum_{i=0}^{k-l} \binom{k-l}{i} \|\Delta_h^l f(x + ih)\| = 2^{k-l} \|\Delta_h^l f(x)\|.$$

Отсюда при $l = 0$ вытекает (1.2), а при $0 < l < k$ — (1.3).

Полагая в (1.3) $l = 1$, находим, что

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant 2^{k-1} \omega_1(\delta, f).$$

Из этого неравенства видно, что для любого натурального $k$

$$\omega_k(\delta, f) \to 0 \qquad (\delta \to +0). \tag{1.4}$$

Лемма 3. *Для любого натурального $k$ модуль непрерывности $k$-го порядка $\omega_k(\delta, f)$ является непрерывной функцией от $\delta$.*

Доказательство. Пусть $0 < \delta < \eta,\ \ |t| \leqslant 1$. Имеем

$$\Delta_{\eta t}^k f(x) = \Delta_{\delta t}^k f(x) + \{\Delta_{\eta t}^k f(x) - \Delta_{\delta t}^k f(x)\} =$$

$$= \Delta_{\delta t}^k f(x) + \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \{f(x + i\eta t) - f(x + i\delta t)\}.$$

Отсюда

$$\|\Delta_{\eta t}^k f(x)\| \leqslant \|\Delta_{\delta t}^k f(x)\| + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \|f(x + i\eta t) - f(x + i\delta t)\|,$$

$$\omega_k(\eta, f) \leqslant \omega_k(\delta, f) + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \omega_1(i(\eta - \delta), f) \leqslant \omega_k(\delta, f) + 2^k \omega_1(k(\eta - \delta), f).$$

Таким образом,

$$0 \leqslant \omega_k(\eta, f) - \omega_k(\delta, f) \leqslant 2^k \omega_1(k(\eta - \delta), f),$$

и так как $\omega_1(h, f) \to 0$ при $h \to +0$, то отсюда вытекает непрерывность функции $\omega_k(\delta, f)$, и лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $k$ и $p$ — натуральные числа. Тогда для любого $\delta \geqslant 0$*

$$\omega_k(p\delta, f) \leqslant p^k \omega_k(\delta, f). \tag{1.5}$$

Доказательство. Индукция по $k$ дает формулу

$$\Delta_{ph}^k f(x) = \sum_{l_1=0}^{p-1} \ldots \sum_{l_k=0}^{p-1} \Delta_h^k f(x + l_1 h + \ldots + l_k h).$$

Отсюда

$$\|\Delta_{ph}^k f(x)\| \leqslant p^k \|\Delta_h^k f(x)\|,$$
$$\omega_k(p\delta, f) \leqslant p^k \omega_k(\delta, f).$$

Лемма 5. *Пусть $k$ — натуральное число, $\delta > 0$, $\eta > 0$. Тогда*

$$\omega_k(\eta, f) \leqslant \delta^{-k}(\delta + \eta)^k \omega_k(\delta, f). \tag{1.6}$$

*Если, кроме того, $0 < \delta < \eta$, то*

$$\eta^{-k}\omega_k(\eta, f) \leqslant 2^k \delta^{-k} \omega_k(\delta, f). \tag{1.7}$$

Доказательство. Докажем сперва неравенство (1.6). Это неравенство очевидно для $\eta \leqslant \delta$. Рассмотрим поэтому случай $\delta < \eta$. Найдем натуральное число $p$ из условий

$$\eta\delta^{-1} \leqslant p < \eta\delta^{-1} + 1. \tag{1.8}$$

Тогда $\eta < p\delta$, и так как $\omega_k(\eta, f)$ является неубывающей функцией от $\eta$, то, принимая во внимание (1.5) и (1.8), получим

$$\omega_k(\eta, f) \leqslant \omega_k(p\delta, f) \leqslant p^k \omega_k(\delta, f) \leqslant (\eta\delta^{-1} + 1)^k \omega_k(\delta, f) = \delta^{-k}(\delta + \eta)^k \omega_k(\delta, f),$$

и неравенство (1.6) доказано.

Неравенство (1.7) вытекает из (1.6), так как $\delta + \eta \leqslant 2\eta$ для $0 < \delta < \eta$.

Неравенство (1.7) показывает, что для любой $f \not\equiv 0$ и любого натурального $k$

$$\omega_k(\delta, f) \in N^k. \tag{1.9}$$

Лемма 6. *Пусть $f$ имеет $r$-ю производную $f^{(r)}$. Тогда*

$$\omega_r(\delta, f) \leqslant \delta^r \|f^{(r)}\| \tag{1.10}$$

*и для любого натурального $k$*

$$\omega_{k+r}(\delta, f) \leqslant \delta^r \omega_k(\delta, f^{(r)}). \tag{1.11}$$

Доказательство. Оба неравенства непосредственно вытекают из формулы

$$\Delta_h^{k+r} f(x) = \int_0^h du_1 \ldots \int_0^h \Delta_h^k f^{(r)}(x + u_1 + \ldots + u_r)\, du_r.$$

## § 2. Обобщение теоремы Джексона

Здесь будет получено небольшое усиление теоремы Джексона о наилучших приближениях периодических функций тригонометрическими полиномами.

Лемма 7. *Пусть дано натуральное число $k$. Существует последовательность ядер $\{K_n(t)\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$, где $K_n(t)$ есть тригонометрический полином порядка не выше $n$, удовлетворяющая условиям*

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\, dt = 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.1}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)|\, dt \leqslant C_1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t|^k |K_n(t)|\, dt \leqslant C_2(k)(n+1)^{-k} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.3}$$

Эту лемму можно считать известной. Как показывает простой подсчет, совершенно аналогичный проводившемуся Джексоном [6, 7] (см. также [5, с. 196]), в качестве ядер $K_n(t)$ можно взять ядра Джексона достаточно высокой степени, т. е. положить

$$K_n(t) = b_p \left( \frac{\sin(pt/2)}{\sin(t/2)} \right)^{2k_0},$$

где $k_0$ — целое, не зависит от $n$, $2k_0 \geqslant k + 2$, натуральное $p$ определяется из неравенств

$$\frac{n}{2k_0} < p \leqslant \frac{n}{2k_0} + 1,$$

а $b_p$ выбирается так, чтобы была выполнена нормировка (2.1).

Лемма 8. *Если последовательность ядер $\{K_n(t)\}$ удовлетворяет всем условиям предыдущей леммы, то*

$$\int_{-\pi}^{\pi} (|t| + n^{-1})^k |K_n(t)|\, dt \leqslant C_3(k) n^{-k} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.4}$$

Доказательство. Имеем, пользуясь (2.2) и (2.3),

$$\int_{-\pi}^{\pi} (|t| + n^{-1})\, |K_n(t)|\, dt = \int_{|t| \leqslant n^{-1}} + \int_{n^{-1} \leqslant |t| \leqslant \pi} \leqslant$$

$$\leqslant 2^k n^{-k} \int_{|t| \leqslant n^{-1}} |K_n(t)|\, dt + 2^k \int_{n^{-1} \leqslant |t| \leqslant \pi} |t|^k |K_n(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2^k n^{-k} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)|\, dt + 2^k \int_{-\pi}^{\pi} |t|^k |K_n(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2^k C_1 n^{-k} + 2^k C_2(k) n^{-k} = 2^k (C_1 + C_2(k)) n^{-k} \leqslant C_3(k) n^{-k},$$

и лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $k$ — натуральное число. Тогда*

$$E_n[f] \leqslant C_3(k) \omega_k \left( \frac{1}{n}, f \right) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть последовательность ядер $\{K_n(t)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ удовлетворяет всем условиям леммы 7. Положим

$$\sigma_{n-1}(x) = (-1)^{k+1} \int_{-\pi}^{\pi} K_{n-1}(t) \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x + it)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, $\sigma_{n-1}(x)$ есть тригонометрический полином порядка не выше $n-1$. Оценим $\|f(x)-\sigma_{n-1}(x)\|$. Имеем

$$f(x)-\sigma_{n-1}(x)=(-1)^k\int_{-\pi}^{\pi}K_{n-1}(t)\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f(x+it)\,dt=$$
$$=(-1)^k\int_{-\pi}^{\pi}K_{n-1}(t)\Delta_t^k f(x)\,dt.$$

Поэтому

$$E_n[f]\leqslant\|f(x)-\sigma_{n-1}(x)\|\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|K_{n-1}(t)|\|\Delta_t^k f(x)\|\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|K_{n-1}(t)|\,\omega_k(|t|,f)\,dt. \qquad (2.6)$$

Оценим последний интеграл. Полагая в неравенстве (1.6) $\eta=|t|$, $\delta=n^{-1}$, получим, что

$$\omega_k(|t|,f)\leqslant n^k\left(|t|+\frac{1}{n}\right)^k\omega_k\left(\frac{1}{n},f\right).$$

Отсюда и из (2.4) следует

$$\int_{-\pi}^{\pi}|K_{n-1}(t)|\,\omega_k(|t|,f)\,dt\leqslant n^k\omega_k\left(\frac{1}{n},f\right)\int_{-\pi}^{\pi}\left(|t|+\frac{1}{n}\right)^k|K_{n-1}(t)|\,dt\leqslant$$
$$\leqslant n^k\omega_k\left(\frac{1}{n},f\right)C_3(k)n^{-k}=C_3(k)\,\omega_k\left(\frac{1}{n},f\right)\qquad(n=1,2,\ldots).$$

Подставляя эту оценку в (2.6), получаем утверждение теоремы.

Следствие 1.1. *Пусть $k$ — натуральное число, $r$ — целое неотрицательное. Тогда*

$$E_n[f]\leqslant C_3(k+r)n^{-r}\omega_k\left(\frac{1}{n},f^{(r)}\right)\qquad(n=1,2,\ldots). \qquad (2.7)$$

В самом деле, согласно (1.11)

$$\omega_{k+r}\left(\frac{1}{n},f\right)\leqslant n^{-r}\omega_k\left(\frac{1}{n},f^{(r)}\right),$$

и применение теоремы 1 дает (2.7).

## § 3. Обобщение неравенства С.Н. Бернштейна

В этом параграфе формулируется одно обобщение неравенства С.Н. Бернштейна для производных от тригонометрического полинома, доказанное мною в работе [9].

Теорема 2. *Пусть $0<\delta<2\pi/n$. Тогда для любого натурального $k$*

$$\|t_n^{(k)}(x)\|\leqslant\left(\frac{n}{2\sin(n\delta/2)}\right)^k\|\Delta_\delta^k t_n(x)\|, \qquad (3.1)$$

*и неравенство обращается в равенство в том и только том случае, если*

$$t_n(x) = a\cos nx + b\sin nx + c.$$

Доказательство этого неравенства опубликовано мною в работе [9]. Отметим несколько следствий из этого неравенства.

Следствие 2.1 (неравенство С.Н. Бернштейна).

$$\|t_n^{(k)}(x)\| \leqslant n^k \|t_n(x)\|. \tag{3.2}$$

Полагая в (3.1) $\delta = \pi/n$, получаем [1)]

$$\|t_n^{(k)}(x)\| \leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^k \|\Delta^k_{\pi/n} t_n(x)\|;$$

но по лемме 2

$$\|\Delta^k_{\pi/n} t_n(x)\| \leqslant 2^k \|t_n(x)\|,$$

откуда и следует (3.2).

Нетрудно проверить, что два последних неравенства одновременно обращаются в равенство только в том случае, если

$$t_n(x) = a\cos nx + b\sin nx.$$

Следствие 2.2. *Пусть $0 < \delta < 2\pi/n$. Тогда*

$$\left(\frac{2}{n\delta}\sin\frac{n\delta}{2}\right)^k \leqslant \frac{\|\Delta^k_\delta t_n(x)\|}{\delta^k \|t_n^{(k)}(x)\|} < 1. \tag{3.3}$$

Первое неравенство совпадает с утверждением теоремы 2, а второе вытекает из очевидной оценки

$$\|\Delta^k_\delta t_n(x)\| \leqslant \delta^k \|t_n^{(k)}(x)\|. \tag{3.4}$$

Таким образом, для $0 < \delta \leqslant \theta\, 2\pi/n$, где $\theta = \mathrm{const}$, $0 < \theta < 1$, средний член в (3.3) заключен между двумя пределами, зависящими только от $\theta$.

Следствие 2.3. *Пусть $0 < \delta \leqslant \pi/n$. Тогда*

$$\|t_n^{(k)}(x)\| \leqslant \left(\frac{n}{2\sin(n\delta/2)}\right)^k \omega_k(\delta, t_n). \tag{3.5}$$

*В частности,*

$$\|t_n^{(k)}(x)\| \leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^k \omega_k\left(\frac{\pi}{n}, t_n\right). \tag{3.6}$$

Следствие 2.4. *Пусть $\delta > 0$ и $0 < \eta \leqslant \pi/n$. Тогда*

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant \left(\frac{n\delta}{2\sin(n\eta/2)}\right)^k \omega_k(\eta, t_n). \tag{3.7}$$

*В частности, для $\eta = \pi/n$ имеем*

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant \left(\frac{n\delta}{2}\right)^k \omega_k\left(\frac{\pi}{n}, t_n\right). \tag{3.8}$$

[1)] Это неравенство доказано С.М. Никольским (см. [8]).

В самом деле, из (3.4) или (1.11) следует

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant \delta^k \|t_n^{(k)}(x)\|$$

и остается воспользоваться неравенством (3.5).

Следствие 2.5. *Пусть $0 < \delta < \eta \leqslant \pi/n$. Тогда*

$$\left(\frac{\delta}{2\eta}\right)^k \omega_k(\eta, t_n) \leqslant \omega_k(\delta, t_n) \leqslant \left(\frac{n\delta}{2\sin(n\eta/2)}\right)^k \omega_k(\eta, t_n). \tag{3.9}$$

Вторая половина неравенства совпадает со следствием 2.4, а первая непосредственно вытекает из (1.7).

## § 4. Дифференциальные свойства тригонометрических полиномов, аппроксимирующих заданную функцию

В этом параграфе устанавливается, что если тригонометрический полином $t_n(x)$ близок к заданной функции $f$, то его модули непрерывности можно оценить через модули непрерывности $f$.

Теорема 3. *Зафиксируем натуральные числа $k$ и $n$, и пусть*

$$\|f - t_n\| \leqslant C_1 \omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right). \tag{4.1}$$

*Тогда для любого $\delta > 0$*

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant \omega_k(\delta, f) + 2^k C_1 \omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right), \tag{4.2}$$

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant \left(\sin\frac{1}{2}\right)^{-k} (2^{-k} + C_1) n^k \omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right) \delta^k, \tag{4.3}$$

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant \left(\sin\frac{1}{2}\right)^{-k} (1 + 2^k C_1) \omega_k(\delta, f), \tag{4.4}$$

*и*

$$\|t_n^{(k)}\| \leqslant \left(\sin\frac{1}{2}\right)^{-k} (2^{-k} + C_1) n^k \omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right). \tag{4.5}$$

Предварительные замечания. Неравенства (4.2) и (4.4) предпочтительнее для больших $\delta$, а (4.3) — для малых. Если $\delta \geqslant 1/n$, то (4.2) сильнее, чем (4.4); однако (4.4) имеет более симметричную форму и часто удобнее в приложениях.

Доказательство. Докажем (4.2). Пользуясь (1.1), (1.2) и (4.1), имеем

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant \omega_k(\delta, f) + \omega_k(\delta, t_n - f) \leqslant$$
$$\leqslant \omega_k(\delta, f) + 2^k \|f - t_n\| \leqslant \omega_k(\delta, f) + 2^k C_1 \omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right).$$

Докажем (4.5). Положим в (4.2) $\delta = 1/n$. Тогда получим

$$\omega_k\left(\frac{1}{n}, t_n\right) \leqslant (1 + 2^k C_1)\ \omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right),$$

после чего (3.5) дает (4.5).

Неравенство (4.3) следует из (4.5) в силу (1.10).

Остается доказать (4.4). Пусть сперва $\delta \geqslant 1/n$. Тогда из (4.2) следует

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant \omega_k(\delta, f) + 2^k C_1 \omega_k(\delta, f) =$$
$$= (1 + 2^k C_1)\,\omega_k(\delta, f) \leqslant \left(\sin\frac{1}{2}\right)^{-k} (1 + 2^k C_1)\,\omega_k(\delta, f).$$

Рассмотрим, наконец, случай $\delta \leqslant 1/n$. Из неравенства (1.7) выводим

$$n^k \omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right)\delta^k \leqslant 2^k \omega_k(\delta, f).$$

Подставляя эту оценку в (4.3), получаем (4.4) для $\delta \leqslant 1/n$.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Следствие 3.1. *Пусть для некоторого натурального $k$ и любого натурального $n$*

$$\|f - t_n\| \leqslant C_2\,\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right). \tag{4.6}$$

*Тогда для любого $\delta > 0$*

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant C_3(k)\,\omega_k(\delta, f) \tag{4.7}$$

*равномерно относительно $n$.*

Следствие 3.2. *Пусть для некоторого натурального $k$ и любого натурального $n$*

$$\|f - t_n\| \leqslant C_4\,\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right).$$

*Тогда*

$$\|t_n^{(k)}\| \leqslant C_5(k) n^k \omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.8}$$

Теорема 4. *Для того чтобы $f \in H_k[\omega]$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$t_n^* \in H_k[\omega] \tag{4.9}$$

*равномерно относительно $n$.*

Это вытекает из теоремы 1, следствия 3.1 и того очевидного замечания, что если выполнено условие (4.9), то $f \in H_k[\omega]$.

Теорема 5. *Для того чтобы $f \in H_k^k$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|t_n^{*(k)}\| = O(1). \tag{4.10}$$

Это доказывается аналогично теореме 4, только вместо следствия 3.1 нужно воспользоваться следствием 3.2.

Неравенства теоремы 3 имеют тот недостаток, что их правые части явно зависят от константы $C_1$. Таким образом, если вместо фиксированного номера $n$ и одного полинома $t_n$ рассматривать последовательность полиномов $\{t_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то $C_1$ окажется, вообще говоря, зависящей от $n$, и теорема 3 даст оценки, не равномерные относительно $n$. Покажем, как избавиться от этого неудобства.

Теорема 6. *Пусть для некоторого натурального $k$*

$$\varphi \in N^k, \qquad f \in H_k[\varphi], \tag{4.11}$$

$$\|f - t_n\| \leqslant C_6 \varphi(n^{-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.12}$$

*Тогда для любого $\delta > 0$*

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant C_7(k)\,\varphi(\delta) \tag{4.13}$$

*равномерно относительно $n$.*

Доказательство. Пусть сперва $\delta \geqslant 1/n$. Из неравенства (4.2) следует, что

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant \omega_k(\delta, f) + 2^k C_6\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right),$$

и на основании (4.11)

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant C_8\,\varphi(\delta) + 2^k C_6\,\varphi(\delta) = C_9(k)\,\varphi(\delta) \qquad \left(\delta \geqslant \frac{1}{n}\right). \tag{4.14}$$

Рассмотрим случай $\delta \leqslant 1/n$. Положим в (4.14) $\delta = 1/n$. Тогда получим

$$\omega_k\left(\frac{1}{n}, t_n\right) \leqslant C_9(k)\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Из этого неравенства, в силу (3.7) следует, что

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant C_{10}(k)(n\delta)^k\varphi\left(\frac{1}{n}\right);$$

но так как по условию $\varphi \in N^k$, то

$$(n\delta)^k\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant C_{11}\,\varphi(\delta) \qquad \left(\delta \leqslant \frac{1}{n}\right).$$

Отсюда

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant C_{10}(k)C_{11}\,\varphi(\delta) = C_{12}(k)\,\varphi(\delta) \qquad \left(\delta \leqslant \frac{1}{n}\right).$$

Окончательно,

$$\omega_k(\delta) \leqslant C_7(k)\,\varphi(\delta),$$

и теорема доказана.

Пример 1. Пусть $s_n$ — частные суммы ряда Фурье функции $f$. Тогда для любого натурального $k$

$$\omega_k(\delta, s_n) \leqslant C_{13}(k)\,\omega_k(\delta, f)\ln(\delta^{-1} + 1)$$

равномерно относительно $n$.

В самом деле, по неравенству Лебега

$$\|f - s_n\| \leqslant (L_n + 1)E_n[f],$$

где $\{L_n\}$ — константы Лебега. Но, как известно,

$$L_n \leqslant C_{14}\ln(n+1) \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

и по теореме 1

$$E_n[f] \leqslant C_{15}(k)\,\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right).$$

Поэтому

$$\|f - s_n\| \leqslant C_{16}(k)\,\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right)\ln(n+1).$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 6 при

$$\varphi(\delta) = \omega_k(\delta, f)\ln(\delta^{-1}+1).$$

О случае $k = 1$ см. [15, § 4.79].

В следующем параграфе будет показано, как можно видоизменить ограничения (4.11) теоремы 6.

## § 5. Обобщение обратных теорем Бернштейна и Валле Пуссена

В этом параграфе обобщаются и уточняются так называемые "обратные теоремы" теории приближения. Речь идет об оценке дифференциальных свойств функции $f$, если известны некоторые свойства последовательности ее наилучших приближений $\{E_n\}$.

Лемма 9. *Зададим натуральное число $k$, и пусть*

$$\|f - t_n\| \leqslant F_n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{5.1}$$

$$\|t_n^{(k)}\| \leqslant G_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.2}$$

*Тогда*

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant 2^k \min_n \{\delta^k G_n + F_n\} \qquad (0 < \delta \leqslant 1). \tag{5.3}$$

Доказательство. Имеем согласно (1.1)

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant \omega_k(\delta, t_n) + \omega_k(\delta, f - t_n).$$

Но из (1.10) и (5.2) получаем

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant \delta^k \|t_n^{(k)}\| \leqslant \delta^k G_n,$$

а из (1.2) и (5.1) —

$$\omega_k(\delta, f - t_n) \leqslant 2^k \|f - t_n\| \leqslant 2^k F_n.$$

Поэтому

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant \delta^k G_n + 2^k F_n \leqslant 2^k \{\delta^k G_n + F_n\};$$

левая часть этого неравенства не зависит от $n$, а потому

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant 2^k \min_n \{\delta^k G_n + F_n\},$$

и лемма доказана.

Для получения хороших оценок $\omega_k(\delta, f)$ обычно достаточно взять $n \sim 1/\delta$. Однако не исключена возможность, что в некоторых случаях другой выбор $n = n(\delta)$ может оказаться предпочтительнее.

Теорема 7. *Пусть $k$ — натуральное число, функция $\omega(\delta)$ не убывает и*

$$\|f - t_n\| \leqslant C_1 \omega\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.4}$$

*Для того чтобы $f \in H_k[\omega]$, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\|t_n^{(k)}\| \leqslant C_2 n^k \omega\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.5}$$

Доказательство. Необходимость условия (5.5) вытекает из следствия 3.2. Установим его достаточность, для чего воспользуемся леммой 9. Получаем:

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant C_3(k)\{(n\delta)^k + 1\}\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Положим здесь $n = [\delta^{-1}] + 1$. Тогда для $0 < \delta \leqslant 1$ будем иметь $n\delta = \delta[\delta^{-1}] + \delta \leqslant 2$ и $n^{-1} \leqslant \delta$. Поэтому

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant C_3(k)\{2^k + 1\}\,\omega(\delta) = C_4(k)\,\omega(\delta),$$

и теорема доказана.

Отметим два следствия из этой теоремы.

Следствие 7.1. *Пусть $k$ — натуральное число, $\omega(\delta)$ не убывает и*

$$E_{n+1}[f] \leqslant C_5\,\omega\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.6}$$

*Для того чтобы $f \in H_k[\omega]$, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\|t_n^{*(k)}\| \leqslant C_6 n^k\,\omega\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.7}$$

Следствие 7.2. *Пусть $k$ — натуральное число и $\varphi \in N^k$. Если*

$$\|f - t_n\| \leqslant C_7\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\|t_n^{(k)}\| \leqslant C_8 n^k\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{5.8}$$

*то*

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant C_9\varphi(\delta) \qquad (0 < \delta \leqslant 1)$$

*равномерно относительно $n$.*

Это вытекает из теорем 7 и 6.

Теорема 7 показывает, что нужно добавить к условию (5.4), чтобы получить $f \in H_k[\omega]$. Теперь мы получим оценки для $\omega_k(\delta, f)$, исходя только из условий вида (5.4). Попутно выясняется, что при некоторых дополнительных ограничениях на функцию $\omega(\delta)$ условие (5.5) становится излишним. Суть дела в том, что при этих ограничениях (5.4) влечет (5.5).

Лемма 10. *Пусть*

$$\|f - t_n\| \leqslant F_{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5.9}$$

*где $F_1 \geqslant F_2 \geqslant \ldots \geqslant F_n \geqslant \ldots$ Тогда для любого натурального $k$*

$$\|t_n^{(k)}\| \leqslant C_{10}(k)\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}F_\nu \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.10}$$

Доказательство. Зафиксируем натуральное число $n$, определим натуральное $p$ из условий

$$2^{p-1} \leqslant n < 2^p$$

и построим последовательность номеров $\{n_l\}$ $(l = 0, 1, \ldots, p)$, положив

$$n_0 = 0, \qquad n_l = 2^l \quad (l = 1, 2, \ldots, p-1), \qquad n_p = n.$$

Для оценки $t_n^{(k)}$ представим $t_n$ в таком виде:

$$t_n(x) = t_0 + \sum_{l=1}^{p} \{t_{n_l}(x) - t_{n_{l-1}}(x)\} = \sum_{l=0}^{p} U_l(x).$$

Так как $U_0 = \mathrm{const}$, то отсюда

$$t_n^{(k)} = \sum_{l=1}^{p} U_l^{(k)}(x),$$

$$\|t_n^{(k)}\| \leqslant \sum_{l=1}^{p} \|U_l^{(k)}(x)\|. \tag{5.11}$$

Оценим $U_l^{(k)}$. Имеем для $l = 1, 2, \ldots, p$

$$U_l(x) = t_{n_l}(x) - t_{n_{l-1}}(x) = (f - t_{n_{l-1}}) - (f - t_{n_l}),$$

откуда

$$\|U_l(x)\| \leqslant \|f - t_{n_{l-1}}\| + \|f - t_{n_l}\| \leqslant F_{n_{l+1}+1} + F_{n_l+1} \leqslant 2F_{n_{l-1}+1}.$$

Но $U_l(x)$ есть тригонометрический полином порядка не выше $n_l$. Поэтому по неравенству С.Н. Бернштейна

$$\|U_l^{(k)}(x)\| \leqslant n_l^k \|U_l(x)\| \leqslant 2n_l^k F_{n_{l-1}+1}. \tag{5.12}$$

Заметим теперь, что в силу определения последовательности $\{n_l\}$

$$n_l \leqslant 4(n_{l-2} + 1) \quad \text{и} \quad n_l \leqslant 4(n_{l-1} - n_{l-2}) \quad \text{для} \quad 2 \leqslant l \leqslant p.$$

Поэтому, пользуясь еще монотонностью последовательности $\{F_n\}$, находим, что для $2 \leqslant l \leqslant p$

$$n_l^k F_{n_{l-1}+1} = n_l^{k-1} n_l F_{n_{l-1}+1} \leqslant 4^{k-1}(n_{l-2}+1)^{k-1} \cdot 4(n_{l-1} - n_{l-2}) F_{n_{l-1}+1} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{2k} \sum_{\nu=n_{l-2}+1}^{n_{l-1}} \nu^{k-1} F_\nu. \tag{5.13}$$

При помощи (5.11), (5.12) и (5.13) находим окончательно

$$\|t_n^{(k)}\| \leqslant \sum_{l=1}^{p} \|U_l^{(k)}\| \leqslant 2\sum_{l=1}^{p} n_l^k F_{n_{l-1}+1} = 2\left\{2^k F_1 + \sum_{l=2}^{p} n_l^k F_{n_{l-1}+1}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant 2\left\{2^k F_1 + \sum_{l=2}^{p} 2^{2k} \sum_{\nu=n_{l-2}+1}^{n_{l-1}} \nu^{k-1} F_\nu\right\} = 2\left\{2^k F_1 + 2^{2k} \sum_{\nu=1}^{n_{p-1}} \nu^{k-1} F_\nu\right\} \leqslant$$
$$\leqslant 2\left\{2^k F_1 + 2^{2k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} F_\nu\right\} \leqslant (2^{k+1} + 2^{2k+1}) \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} F_\nu = C_{10}(k) \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} F_\nu,$$

и лемма доказана.

Теорема 8. *Для любого натурального $k$ и любого $n \leqslant \delta^{-1}$*

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant C_{11}(k) n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu[f] \qquad (0 < \delta \leqslant 1). \tag{5.14}$$

Доказательство. Имеем

$$\|f - t_n^*\| \leqslant E_{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Отсюда по лемме 10

$$\|t_n^{*(k)}\| \leqslant C_{10}(k) \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu.$$

Воспользуемся теперь леммой 9. Получаем

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant 2^k \left\{ \delta^k C_{10}(k) \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu + E_{n+1} \right\}.$$

Если $n \leqslant \delta^{-1}$, то $\delta^k \leqslant n^{-k}$. Кроме того,

$$E_{n+1} \leqslant E_n \leqslant C_{12}(k) n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu.$$

Поэтому для $n \leqslant \delta^{-1}$

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant 2^k \left\{ C_{10}(k) n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu + C_{12}(k) n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu \right\} \leqslant$$

$$\leqslant C_{11}(k) n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu,$$

и теорема доказана.

Мы обращаемся теперь к рассмотрению вопроса о том, при каких ограничениях на $\{E_n\}$ условие (5.4) влечет $f \in H_k[\omega]$.

Теорема 9. *Зададим натуральное число $k$; пусть $0 < \alpha < k$ и $\varphi \in N^\alpha$. Для того чтобы $f \in H_k[\varphi]$, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$E_n \leqslant C_{13} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.15}$$

Доказательство. Необходимость условия (5.15) вытекает из теоремы 1. Докажем его достаточность. Согласно теореме 8 для $n\delta \leqslant 1$

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant C_{14}(k) n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} \varphi\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Положим здесь $n = [\delta^{-1}]$ и заметим, что тогда $n\delta \geqslant 1/2$ для $\delta \leqslant 1$ и в силу условия $\varphi \in N^\alpha$

$$\nu^\alpha \varphi\left(\frac{1}{\nu}\right) \leqslant C_{15} \delta^{-\alpha} \varphi(\delta) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Поэтому для $\delta \leqslant 1$

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant C_{16}(k) n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-\alpha-1} \delta^{-\alpha} \varphi(\delta) \leqslant C_{17}(k, \alpha) (n\delta)^{-\alpha} \varphi(\delta) \leqslant C_{18}(k, \alpha)\, \varphi(\delta),$$

и теорема доказана.

Следствие 9.1. *Пусть $\alpha > 0$ и $\varphi \in N^\alpha$. Тогда для всех натуральных $k > \alpha$ классы $H_k[\varphi]$ эквивалентны.*

Следствие 9.2. *Пусть $\alpha > 0$ и $\varphi \in N^\alpha$. Если*

$$\|f - t_n\| \leqslant C_{19}\, \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

*то для любого фиксированного натурального $k > \alpha$*

$$\omega_k(\delta, t_n) \leqslant C_{20}(k, \alpha)\, \varphi(\delta) \qquad (0 < \delta \leqslant 1)$$

*равномерно относительно $n$.*

Рассмотрим теперь следующий вопрос. Как связаны приближения функции $f$ с приближениями и дифференциальными свойствами ее производных $f^{(r)}$?

Теорема 10. *Зададим натуральное число $r$, и пусть*

$$\|f - t_n\| \leqslant F_{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5.16}$$

*где*

$$F_1 \geqslant F_2 \geqslant \ldots \geqslant F_n \geqslant \ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} F_n < \infty. \tag{5.17}$$

*Тогда $f$ имеет непрерывную производную $f^{(r)}$ и*

$$\|f^{(r)} - t_n^{(r)}\| \leqslant C_{21}(r) \left\{ n^r F_{n+1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} F_\nu \right\} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.18}$$

С.Н. Бернштейн [1] доказал такую теорему: *если ряд $\sum n^{r-1} E_n[f]$ сходится, то функция $f$ имеет непрерывную производную $f^{(r)}$.* Рассмотрение этого доказательства С.Н. Бернштейна показывает, что на самом деле им установлено следующее более общее предложение: *пусть выполнены условия* (5.16) *и* (5.17); *тогда функция $f$ имеет непрерывную производную $f^{(r)}$ и $t_n^{(r)}(x) \to f^{(r)}(x)$ равномерно относительно $x$.* В ходе доказательства теоремы 10 мы вновь установим это предложение.

Доказательство. Очевидно, $F_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $t_n(x) \to f(x)$ равномерно относительно $x$. Отсюда следует, что если $\{n_k\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ есть возрастающая последовательность номеров, то

$$f(x) = t_{n_0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \{t_{n_k}(x) - t_{n_{k-1}}(x)\}.$$

Зафиксируем натуральное число $n$ и положим

$$n_k = 2^k n \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Тогда будем иметь

$$f(x) - t_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x), \tag{5.19}$$

где

$$U_k(x) = t_{2^k n}(x) - t_{2^{k-1} n}(x).$$

Докажем, что формулу (5.19) можно продифференцировать почленно $r$ раз, т. е.

$$f^{(r)}(x) - t_n^{(r)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k^{(r)}(x). \tag{5.20}$$

Для этого достаточно установить, что ряд справа равномерно сходится. Прежде всего, оценим $U_k(x)$. Имеем

$$U_k(x) = \{t_{2^k n}(x) - f(x)\} - \{t_{2^{k-1} n}(x) - f(x)\} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

откуда

$$\|U_k\| \leqslant \|t_{2^k n} - f\| + \|t_{2^{k-1}n} - f\| \leqslant F_{2^k n+1} + F_{2^{k-1}n+1} \leqslant 2F_{2^{k-1}n+1}.$$

Оценим теперь $U_k^{(r)}(x)$. По неравенству Бернштейна

$$\|U_k^{(r)}\| \leqslant (2^k n)^r \|U_k\| \leqslant 2(2^k n)^r F_{2^{k-1}n+1}.$$

Пользуясь этой оценкой, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|U_k^{(r)}\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2(2^k n)^r F_{2^{k-1}n+1} = 2\left\{2^r n^r F_{n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} (2^{k+1}n)^r F_{2^k n+1}\right\}.$$

Но

$$(2^{k+1}n)^r F_{2^k n+1} = 4^r (2^{k-1}n)^{r-1} 2^{k-1} n F_{2^k n+1} \leqslant 4^r \sum_{\nu=2^{k-1}n+1}^{2^k n} \nu^{r-1} F_\nu.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|U_k^{(r)}\| \leqslant 2\left\{2^r n^r F_{n+1} + 4^r \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=2^{k-1}n+1}^{2^k n} \nu^{r-1} F_\nu\right\} =$$

$$= 2\left\{2^r n^r F_{n+1} + 4^r \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} F_\nu\right\} \leqslant C_{21}(r)\left\{n^r F_{n+1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} F_\nu\right\}. \quad (5.21)$$

Итак, доказана сходимость ряда $\sum \|U_k^{(r)}\|$, а вместе с этим установлена и формула (5.20). Из (5.20) и (5.21) вытекает, что

$$\|f^{(r)} - t_n^{(r)}\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|U_k^{(r)}\| \leqslant C_{21}(r)\left\{n^r F_{n+1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} F_\nu\right\},$$

и теорема доказана.

В некоторых случаях оценка (5.18) может быть упрощена. Пусть, например,

$$F_{2n} \geqslant C_{22} F_n. \quad (5.22)$$

Тогда

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} F_\nu \geqslant \sum_{\nu=n+1}^{2n} \nu^{r-1} F_\nu \geqslant n^{r+1} \cdot n F_{2n} \geqslant C_{22} n^r F_n \geqslant C_{22} n^r F_{n+1}.$$

Поэтому при выполнении условия (5.22) вместо (5.18) можно написать

$$\|f^{(r)} - t_n^{(r)}\| \leqslant C_{23}(r) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} F_\nu.$$

Следствие 10.1. *Пусть $r$ — натуральное число и сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} E_n[f].$$

*Тогда*

$$E_n[f^{(r)}] \leqslant C_{24}(r)\left\{n^r E_n[f] + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu[f]\right\} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \quad (5.23)$$

Теорема 11[2]. *Пусть $r$ — натуральное число и для функции $f$ сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1}E_n \qquad (E_n = E_n[f]).$$

*Тогда для любого натурального $k$ и любого $n \leqslant \delta^{-1}$*

$$\omega_k(\delta, f^{(r)}) \leqslant C_{25}(k,r)\biggl\{n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}E_\nu + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}E_\nu\biggr\}. \tag{5.24}$$

Доказательство. Имеем

$$\|f - t_n^*[f]\| \leqslant E_{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Отсюда по лемме 10

$$\|t_n^{*(k+r)}\| \leqslant C_{26}(k,r)\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}E_\nu.$$

Далее, согласно теореме 10

$$\|f^{(r)} - t_n^{*(r)}\| \leqslant C_{21}(r)\biggl\{n^r E_{n+1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}E_\nu\biggr\}.$$

Воспользуемся теперь леммой 9. Получаем

$$\omega_k(\delta, f^{(r)}) \leqslant 2^k\biggl\{\delta^k C_{26}(k,r)\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}E_\nu + C_{21}(r)\biggl(n^r E_{n+1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}E_\nu\biggr)\biggr\} \leqslant$$

$$\leqslant C_{27}(k,r)\biggl\{\delta^k\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}E_\nu + n^r E_{n+1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}E_\nu\biggr\}.$$

Заметим, что

$$n^r E_{n+1} \leqslant C_{28}(k,r)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}E_\nu.$$

Таким образом, если $n\delta \leqslant 1$, то

$$\omega_k(\delta, f^{(r)}) \leqslant C_{25}(k,r)\biggl\{n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}E_\nu + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}E_\nu\biggr\},$$

и теорема доказана.

Эту теорему можно было бы также доказать, исходя из теорем 8 и 10, но тогда выкладки были бы несколько длиннее.

## § 6. Основная теорема

Обратимся теперь к рассмотрению следующего вопроса: каковы необходимые и достаточные условия для того, чтобы

$$E_n[f] \sim \varphi\left(\frac{1}{n}\right),$$

[2] А.Ф. Тиман получил независимо от меня доказательство этого предложения.

где $\varphi(\delta)$ — заданная невозрастающая функция?

Насколько нам известно, эта задача не была до сих пор решена даже для случая $\varphi(\delta)=\delta^\alpha$. Мы решим ее для функций сравнения $\varphi\in N^\alpha$.

Лемма 11. *Пусть $\varphi\in N^\alpha$ и для некоторого натурального $k>\alpha$*

$$\omega_k(\delta,f)\sim\varphi(\delta). \tag{6.1}$$

*Тогда существует такая константа $c>0$, что*

$$E_n[f]\geqslant c\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\qquad(n=1,2,\ldots). \tag{6.2}$$

Доказательство. Согласно (6.1) найдутся две такие константы, $C_1>0$ и $C_2>0$, что

$$C_1\varphi(\delta)\leqslant\omega_k(\delta,f)\leqslant C_2\varphi(\delta)\qquad(0<\delta\leqslant 1). \tag{6.3}$$

Последнее из этих неравенств, теорема 1 и теорема 3 влекут неравенство

$$\omega_k(\delta,t_n^*)\leqslant C_3(n\delta)^k\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\qquad(\delta>0,\quad n=1,2,\ldots). \tag{6.4}$$

В силу (1.1) и (1.2) имеем

$$\omega_k(\delta,f)\leqslant\omega_k(\delta,t_n^*)+\omega_k(\delta,f-t_n^*)\leqslant\omega_k(\delta,t_n^*)+2^k\|f-t_n^*\|\leqslant\omega_k(\delta,t_n^*)+2^kE_n[f].$$

Отсюда

$$E_n[f]\geqslant 2^{-k}\{\omega_k(\delta,f)-\omega_k(\delta,t_n^*)\}.$$

Пользуясь (6.3) и (6.4), находим, далее,

$$E_n[f]\geqslant 2^{-k}\left\{C_1\varphi(\delta)-C_3(n\delta)^k\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right\}. \tag{6.5}$$

Вспомним теперь, что $\varphi\in N^\alpha$. Это дает нам для $\delta\leqslant 1/n$

$$\varphi(\delta)\geqslant C_5(n\delta)^\alpha\varphi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Подставляя эту оценку в (6.5), получаем

$$\begin{aligned}E_n[f]\geqslant 2^{-k}\left\{C_1C_5(n\delta)^\alpha\varphi\left(\frac{1}{n}\right)-C_3(n\delta)^k\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right\}=\\ =C_6\{C_7-(n\delta)^{k-\alpha}\}(n\delta)^\alpha\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\qquad\left(\delta\leqslant\frac{1}{n}\right).\end{aligned} \tag{6.6}$$

Мы можем без ограничения общности считать, что здесь $C_7\leqslant 2$. Положим в (6.6)

$$\delta=\left(\frac{C_7}{2}\right)^{1/(k-\alpha)}\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{n}.$$

Тогда получим окончательно

$$E_n[f]\geqslant C_6\left(\frac{C_7}{2}\right)^{k/(k-\alpha)}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)=c\,\varphi\left(\frac{1}{n}\right),$$

и лемма доказана.

Основная теорема. *Пусть $\varphi\in N^\alpha$. Для того чтобы*

$$E_n[f]\sim\varphi\left(\frac{1}{n}\right), \tag{6.7}$$

*необходимо, чтобы для всех натуральных $k > \alpha$, и достаточно, чтобы для некоторого натурального $k > \alpha$*

$$\omega_k(\delta, f) \sim \varphi(\delta). \tag{6.8}$$

Доказательство. Пусть имеет место (6.7), т. е. найдутся две положительные константы, $C_8$ и $C_9$, для которых

$$C_8 \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant E_n[f] \leqslant C_9\, \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{6.9}$$

Тогда по теореме 1 и в силу первой половины неравенства (6.9) для любого $k$ имеем

$$C_{10}\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right) \geqslant E_n[f] \geqslant C_8\, \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \dots),$$

т.е.

$$\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right) \geqslant C_{11}\, \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Отсюда в силу $\omega_k \in N^k$

$$\omega_k\left(\frac{1}{n+1}, f\right) \geqslant C_{12}\, \varphi\left(\frac{1}{n}\right),$$

и если $1/(n+1) \leqslant \delta \leqslant 1/n$ то ввиду монотонности $\omega_k$ и $\varphi$

$$\omega_k(\delta, f) \geqslant C_{12}\varphi(\delta) \qquad (0 < \delta < 1).$$

Далее, из второй половины неравенства (6.9) и теоремы 9 вытекает существование константы $C_{13}$ такой, что для любого $k > \alpha$

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant C_{13}\varphi(\delta).$$

Этим заканчивается доказательство необходимости условия (6.8).

Пусть имеет место (6.8):

$$C_{14}\varphi(\delta) \leqslant \omega_k(\delta, f) \leqslant C_{15}\varphi(\delta) \qquad (\delta > 0) \tag{6.10}$$

с $C_{14} > 0$. Тогда по теореме 1 и в силу второй половины неравенства (6.10)

$$E_n[f] \leqslant C_{16}\omega_k\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqslant C_{17}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \dots),$$

а по лемме 11

$$E_n[f] \geqslant C_{18}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \dots),$$

где $C_{18} > 0$.

Таким образом, установлена достаточность условия (6.8), и основная теорема полностью доказана.

Пример 2. Пусть $0 < \alpha < 1$. Для того чтобы

$$E_n \sim n^{-\alpha},$$

необходимо и достаточно выполнения условия $\omega_1(\delta) \sim \delta^\alpha$.

Пример 3 (С.Н. Бернштейн [1]).

$$E_n[|u|; -1, 1] \sim \frac{1}{n}.$$

В самом деле, $\omega_2(\delta, |\cos x|) \sim \delta$.

Приведем в заключение обобщение леммы 11 на тот случай, когда оценки $\omega_k(\delta, f)$ сверху и снизу имеют разные порядки.

Теорема 12. *Пусть* $0 \leqslant \alpha < \beta < k$ *и*

$$0 < C_{19}\delta^{\beta} \leqslant \omega_k(\delta, f) \leqslant C_{20}\delta^{\alpha}. \tag{6.11}$$

*Тогда*

$$E_n[f] \geqslant C_{21} n^{-\beta(k-\alpha)/(k-\beta)} > 0. \tag{6.12}$$

Доказательство. Имеем, как при доказательстве леммы 11,

$$E_n[f] \geqslant 2^{-k}\{\omega_k(\delta, f) - \omega_k(\delta, t_n^*)\} \geqslant 2^{-k}\{C_{19}\delta^{\beta} - C_{22}(n\delta)^k n^{-\alpha}\} =$$
$$= 2^{-k}\delta^{\beta}(C_{19} - C_{22}n^{k-\alpha}\delta^{k-\beta}).$$

Положим здесь $\delta = \bigl(C_{10}/(2C_{22})\bigr)^{1/(k-\beta)} n^{-(k-\alpha)/(k-\beta)}$.

Тогда получим, что

$$E_n[f] \geqslant 2^{-k}\left(\frac{C_{10}}{2C_{22}}\right)^{k/(k-\beta)} n^{-\beta(k-\alpha)/(k-\beta)} = C_{21} n^{-\beta(k-\alpha)/(k-\beta)} > 0.$$

Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Бернштейн С.Н.* О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени // Сообщ. Харьк. матем. об-ва. Сер. 2. 1912. Т. 13. С. 49–144.
2. *Бернштейн С.Н.* Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynomes de degrés donnés // Acta Mathematica. 1913. V. 37. P. 1–57.
3. *Бернштейн С.Н.* Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. Ч. I. — М.—Л., 1937.
4. *Бернштейн С.Н.* О свойствах однородных функциональных классов // Докл. АН СССР. 1947. Т. 57. С. 111–114.
5. *Гончаров В.Л.* Теория интерполирования и приближения функций. — М.—Л., 1934.
6. *Jackson D.* Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrischen Summen gegebener Ordnung. — Diss. Göttingen, 1911.
7. *Jackson G.* The theory of approximation. — N. Y., 1930.
8. *Никольский С.М.* Обобщение одного неравенства С.Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60. С. 1507–1510.
9. *Стечкин С.Б.* Обобщение некоторых неравенств С.Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60. С. 1511–1514.
10. *Стечкин С.Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Докл. АН СССР. 1949. Т. 65. С. 135–137.
11. *Тиман А.Ф., Тиман М.Ф.* Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем // Докл. АН СССР. 1950. Т. 71. С. 17–20.
12. *de la Vallée Poussin C.* Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. — Paris, 1919.
13. *Zamansky M.* Sur l'approximation des fonctions continues // Comptes Rendus. 1947. V. 224. P. 704–706.
14. *Zamansky M.* Sur l'approximation des fonctions continues // Comptes Rendus. 1948. V. 226. P. 1066–1068.
15. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. — М.—Л., 1939.
16. *Zygmund A.* Smooth functions // Duke Math. Journ. 1945. V. 12. P. 47–76.