

# К ПРОБЛЕМЕ МНОЖИТЕЛЕЙ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ <sup>\*</sup>)

1. Пусть  $C_n$  есть пространство тригонометрических полиномов порядка  $n$

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (1)$$

с нормой  $\|t_n\| = \max_x |t_n(x)|$ . Зададим последовательность множителей  $\Lambda = \{\lambda_k\}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) и построим тригонометрические полиномы

$$\begin{aligned} \tau_n(x) &= \tau_n(x, t_n) = \lambda_0 \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \\ \tilde{\tau}_n(x) &= \tilde{\tau}_n(x, t_n) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (b_k \cos kx - a_k \sin kx), \end{aligned}$$

где  $a_k$  и  $b_k$  — коэффициенты полинома (1). Положим

$$\begin{aligned} M_n &= M_n(\Lambda) = \sup_{\|t_n\| \leq 1} \|\tau_n(t_n)\|, \\ \tilde{M}_n &= \tilde{M}_n(\Lambda) = \sup_{\|t_n\| \leq 1} \|\tilde{\tau}_n(t_n)\|. \end{aligned}$$

По самому определению числа  $M_n$  и  $\tilde{M}_n$  являются наименьшими константами, при которых справедливы неравенства

$$\|\tau_n(t_n)\| \leq M_n \|t_n\|, \quad \|\tilde{\tau}_n(t_n)\| \leq \tilde{M}_n \|t_n\| \quad (2)$$

для любого полинома  $t_n \in C_n$ .

Задачу определения или оценки констант  $M_n$  и  $\tilde{M}_n$  мы будем называть проблемой множителей для тригонометрических полиномов. Исходным пунктом всей теории явился рассмотренный С.Н. Бернштейном [1] случай  $\lambda_k = k$ . Если  $\lambda_0 = 0$ ,  $\Delta \lambda_k = \lambda_k - \lambda_{k-1} \geq 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) и  $\Delta^2 \lambda_k = \lambda_k - 2\lambda_{k-1} + \lambda_{k-2} \geq 0$  ( $k = 2, \dots, n$ ), то согласно результатам Г. Сеге [2] и Л. Фейера [3] (см. также [4])  $M_n = \tilde{M}_n = \lambda_n$ . Обратимся теперь к рассмотрению случая, когда

$$\lambda_0 = 0, \quad \Delta \lambda_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad \Delta^2 \lambda_k \leq 0 \quad (k = 2, \dots, n). \quad (3)$$

Г.Т. Соколов [4] получил при этих условиях для  $M_n$  оценку

$$M_n \leq \frac{1}{n} \left( \lambda_n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \right),$$

откуда в связи с очевидным неравенством  $M_n \geq \lambda_n$  вытекает, что  $M_n \sim \lambda_n$ <sup>1)</sup>. Что же касается оценок  $\tilde{M}_n$  для случая (3), то здесь, насколько нам известно, не

<sup>\*</sup>) Докл. АН СССР. 1950. Т. 75, № 2. С. 165–168.

<sup>1)</sup> Здесь и в дальнейшем знак  $\sim$  употребляется как знак порядкового равенства. Запись  $A_n \sim B_n$  означает, что существуют две абсолютные постоянные  $0 < c_1 < c_2$  такие, что для всех  $n$   $c_1 B_n \leq A_n \leq c_2 B_n$ .

было получено общих результатов. Г.Т. Соколов [4] рассмотрел только частный случай  $\lambda_k = k^\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) и довольно сложным путем показал, что

$$c_\alpha n^\alpha \leq \widetilde{M}_n(k^\alpha) \leq c'_\alpha n^\alpha, \quad (4)$$

где  $c_\alpha$  и  $c'_\alpha$  зависят только от  $\alpha$ .

В настоящей работе я доказываю, что при выполнении условий (3)

$$\widetilde{M}_n(\Lambda) \sim P_n = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{k}.$$

**2.** Нам понадобятся две леммы. Зададим произвольно последовательность  $\Lambda = \{\lambda_k\}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $\lambda_0 = 0$ ) и положим

$$K_n(t) = \frac{\lambda_n}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{n-k} \cos kt, \quad I_n = I_n(\Lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |K_n(t)| dt.$$

ЛЕММА 1. Для любой последовательности  $\Lambda = \{\lambda_k\}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $\lambda_0 = 0$ )

$$\widetilde{M}_n(\Lambda) \leq \frac{\pi}{2} I_n(\Lambda). \quad (5)$$

Доказательство. Пусть  $t_n \in C_n$  и

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin(2p+1)x}{2p+1} \quad (-\pi < x < \pi).$$

Так как  $K_n(u) t_n(x+u)$  есть тригонометрический полином относительно  $u$  порядка не выше  $2n-1$ , то

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(nu) K_n(u) t_n(x+u) du = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nu) K_n(u) t_n(x+u) du.$$

Но, как хорошо известно (см. [2] или [4]), последний интеграл равен  $\widetilde{\tau}_n(x, t_n)$ . Таким образом,

$$\widetilde{\tau}_n(x, t_n) = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(nu) K_n(u) t_n(x+u) du.$$

Отсюда  $\|\widetilde{\tau}_n(t_n)\| \leq 2I_n \|\varphi\| \|t_n\| = (\pi/2) I_n \|t_n\|$ . В силу произвольности полинома  $t_n$  из этого неравенства вытекает (5), и лемма доказана.

Дадим теперь оценку  $I_n$  сверху.

ЛЕММА 2. Если последовательность  $\Lambda = \{\lambda_k\}$  удовлетворяет условиям (3), то

$$I_n(\Lambda) \leq \frac{4}{\pi^2} P_n + c_3 \lambda_n. \quad (6)$$

Эта лемма является уточнением одного результата Хилла и Тамаркина [5] (см. также [6, § 8.85; 7]).

Доказательство. Положим<sup>2)</sup>

$$V_n^{(m)}(t) = \frac{1}{m} \sum_{k=n-m+1}^n D_k(t) \quad (m = 1, 2, \dots, n+1),$$

<sup>2)</sup> Идея использования в аналогичных задачах ядер Валле Пуссена  $V_n^{(m)}(t)$  принадлежит И.В. Матвееву [8]

где  $D_k(t)$  — ядро Дирихле. Дважды применяя преобразование Абеля, получим

$$K_n(t) = - \sum_{k=1}^{n-1} k \Delta^2 \lambda_{k+1} V_{n-1}^{(k)}(t) + n \Delta \lambda_n V_{n-1}^{(n)}(t).$$

Отсюда

$$I_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |K_n(t)| dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} k |\Delta^2 \lambda_{k+1}| N_{n-1}^{(k)} + n \Delta \lambda_n N_{n-1}^{(n)}, \quad (7)$$

где

$$N_{n-1}^{(k)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |V_{n-1}^{(k)}(t)| dt.$$

Константы  $N_{n-1}^{(k)}$  являются нормами сумм Валле Пуссена ([9; 10, с. 33–35; 11; 12]) и для них справедлива следующая оценка С.М. Никольского [12]:

$$N_{n-1}^{(k)} = \frac{4}{\pi^2} \ln \frac{n}{k} + O(1),$$

где член  $O(1)$  равномерно ограничен для всех  $n$  и  $k$ . Подставляя эту оценку в неравенство (7), получаем

$$I_n \leq \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n-1} k \ln \frac{n}{k} |\Delta^2 \lambda_{k+1}| + O\left(\sum_{k=1}^{n-1} k |\Delta^2 \lambda_{k+1}|\right) + O(n \Delta \lambda_n).$$

Заметим теперь, что в силу условий (3)

$$n \Delta \lambda_n \leq \lambda_n, \quad \sum_{k=1}^p k |\Delta^2 \lambda_{k+1}| \leq \lambda_p \quad (p = 1, 2, \dots, n-1).$$

Вновь применяя преобразование Абеля, находим

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \ln \frac{n}{k} |\Delta^2 \lambda_{k+1}| = \sum_{p=1}^{n-1} \ln \frac{p+1}{p} \sum_{k=1}^p k |\Delta^2 \lambda_{k+1}| \leq P_n.$$

Поэтому  $I_n \leq (4/\pi^2) P_n + O(\lambda_n)$ , и лемма 2 доказана.

**3.** Переходим к формулировке и доказательству основных результатов работы.

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть последовательность  $\Lambda = \{\lambda_k\}$  удовлетворяет условиям (3). Тогда

$$\widetilde{M}_n(\Lambda) \sim I_n(\Lambda) \sim P_n. \quad (8)$$

Второе из этих соотношений известно [5, теорема 5].

**Доказательство.** Из лемм 1 и 2 следует, что

$$\widetilde{M}_n(\Lambda) \leq \frac{\pi}{2} I_n(\Lambda) \leq \frac{2}{\pi} P_n + c_4 \lambda_n.$$

Но в силу условий (3)  $\lambda_k \geq (k/n) \lambda_n$ , откуда  $P_n \geq \lambda_n$ . Поэтому

$$\widetilde{M}_n(\Lambda) \leq \frac{\pi}{2} I_n(\Lambda) \leq c_5 P_n. \quad (9)$$

Остается оценить  $\widetilde{M}_n$  снизу. Для этого положим

$$t_n^*(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sin kx.$$

Как хорошо известно,  $\|t_n^*\| \leq c_6$ . С другой стороны,

$$\|\tilde{\tau}_n(t_n^*)\| \geq \tilde{\tau}_n(0, t_n^*) = P_n.$$

Отсюда и из (2)

$$\widetilde{M}_n(\Lambda) \geq \frac{\|\tilde{\tau}_n(t_n^*)\|}{\|t_n^*\|} \geq \frac{1}{c_6} P_n. \quad (10)$$

Из (9) и (10) следует (8), и теорема 1 доказана.

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть последовательность  $\Lambda = \{\lambda_k\}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) удовлетворяет для любого  $n$  условиям (3). Тогда

$$\widetilde{M}_n(\Lambda) = \frac{2}{\pi} P_n + O(\lambda_n), \quad I_n(\Lambda) = \frac{4}{\pi^2} P_n + O(\lambda_n). \quad (11)$$

В частности, если, кроме того,  $\lambda_n = o(P_n)$ , то

$$\widetilde{M}_n(\Lambda) \approx \frac{2}{\pi} P_n, \quad I_n(\Lambda) \approx \frac{4}{\pi^2} P_n. \quad (12)$$

**Доказательство.** Из лемм 1 и 2 следует, что

$$\widetilde{M}_n(\Lambda) \leq \frac{\pi}{2} I_n \leq \frac{2}{\pi} P_n + O(\lambda_n). \quad (13)$$

С другой стороны, положим

$$\sigma_n(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \frac{1}{k} \sin kx.$$

Полином  $\sigma_n(x)$  является суммой Фейера порядка  $n$  для функции  $\varphi_1(x) = (\pi-x)/\pi$  ( $0 < x \leq 2\pi$ ). Так как  $\|\varphi_1\| = 1$ , то  $\|\sigma_n\| \leq 1$ . Далее,

$$\|\tilde{\tau}_n(\sigma_n)\| \geq \tilde{\tau}_n(0, \sigma_n) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \frac{\lambda_k}{k} \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{k} - \frac{2}{\pi} \lambda_n.$$

Отсюда и из (2)

$$\widetilde{M}_n(\Lambda) \geq \frac{\|\tilde{\tau}_n(\sigma_n)\|}{\|\sigma_n\|} \geq \frac{2}{\pi} P_n + O(\lambda_n). \quad (14)$$

Неравенства (13) и (14) дают соотношения (11). Если же, кроме того, выполняется условие  $\lambda_n = o(P_n)$ , то из (11) следует (12), и теорема 2 доказана.

Применяя полученные результаты к случаю Г.Т. Соколова  $\lambda_k = k^\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ), сразу же выводим неравенства (4), где  $c'_\alpha = 2/(\pi\alpha) + c_7$ ,  $c_\alpha = 2/(\pi\alpha) - c_8$  (для малых  $\alpha$ ) и  $c_\alpha \geq c_9$  (для  $\alpha$ , близких к 1).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бернштейн С.Н. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени // Сообщ. Харьк. мат. об-ва. Сер. 2. 1912. Т. 13. С. 49–194.
2. Szegő G. Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein // Schr. Königsberger Gelehrten Ges. Naturwiss. Kl. 1928. H. 4. S. 59–70.
3. Fejer L. Über die Positivat von Summen die nach trigonometrischen oder Legendreschen Funktionen fortschreiten // Acta Lit. Ac. Sci. 1925. V. 2. P. 75–86.
4. Соколов Г.Т. О некоторых экстремальных свойствах тригонометрических сумм // Изв. АН СССР. ОМОН. 1935. № 6–7. С. 857–882.

5. *Hille E., Tamarkin J.D.* On the summability of Fourier series // *Trans. Am. Math. Soc.* 1932. V. 34. P. 757–783.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. — М.—Л., 1939.
7. *Никольский С.М.* О линейных методах суммирования рядов Фурье // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1948. Т. 12, № 3. С. 259–278.
8. *Матвеев И.В.* О методах суммирования двойных рядов Фурье: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — МГУ, 1950.
9. *de la Vallée Poussin Ch. J.* Sur la meilleure approximation des fonction d'une variable réelle par des expressions d'ordre donné // *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris.* 1918. V. 166. P. 799.
10. *de la Vallée Poussin Ch. J.* Leçons sur l'approximation des fonctions. — Paris, 1919.
11. *Вербицкий Л.* Об одном способе суммирования интерполяционных полиномов // *Научн. зап. Днепрпетр. гос. ун-та.* 1940. Т. 21. С. 113.
12. *Никольский С.М.* О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1940. Т. 4, № 6. С. 509–520.